Διάλεξη 15: Υπολογισμός εμβαδών και όγκων στερεών

Ανακοινώσεις

- (προαιρετική*) Πρόοδος Σάββατο 25/11/2023, στις 14:00
- Ύλη - Όρια Παράγωγοι *lectures* 1 – 11 (κεφάλαια 1,2,3 και 4 *Thomas Calculus* 14*th edition*)
- Θα είναι διαθέσιμα τα δύο αμφιθέατρα, τα αναγνωστήρια και κάποιες αίθουσες Α.
- Η εξέταση είναι με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.
- Μπορείτε να έχετε ένα «απλό» κομπιουτεράκι.
- Ο βαθμός της προόδου λαμβάνεται υπόψιν μόνο αν βοηθάει στην τελική βαθμολογία.

Εμβαδόν χωρίου μη αρνητικής συνάρτησης

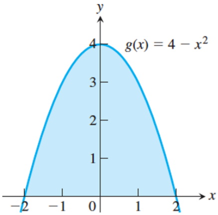
Αν η $y = f(x)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσημη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι το ολοκήρωμα της f από a έως b

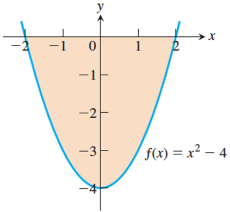
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ολικό εμβαδόν

Το εμβαδόν είνα πάντα θετικός αριθμός.

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική, τότε $A = \int_a^b f(x)dx$
- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι αρνητική, τότε $A = -\int_a^b f(x)dx$

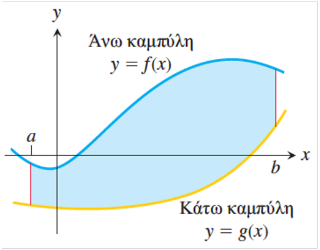


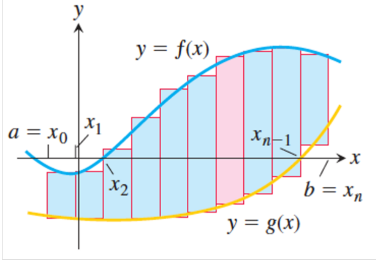


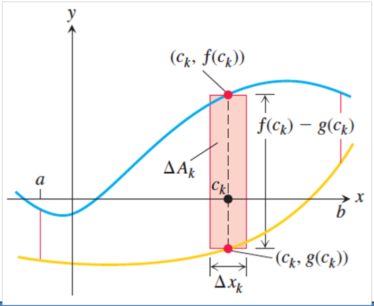
Ολικό εμβαδόν

1. Υποδιαιρούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα που ορίζονται από τα σημεία μηδενισμού
2. Ολοκληρώνουμε σε κάθε διάστημα
3. Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές

Εμβαδά μεταξύ καμπυλών







Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

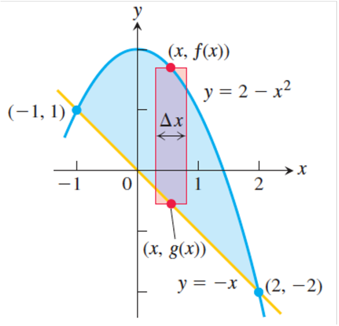
Αν οι f και g είναι συνεχής με $f(x) \geq g(x)$ παντού στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y = f(x)$ και $y = g(x)$ από το a έως το b είναι το ολοκλήρωμα της $(f - g)$ από το a έως το b

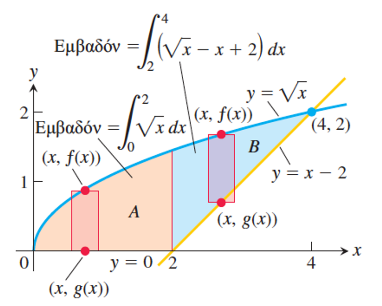
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Παραδείγματα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου ανάμεσα στην $y = 2 - x^2$ και $y = -x$

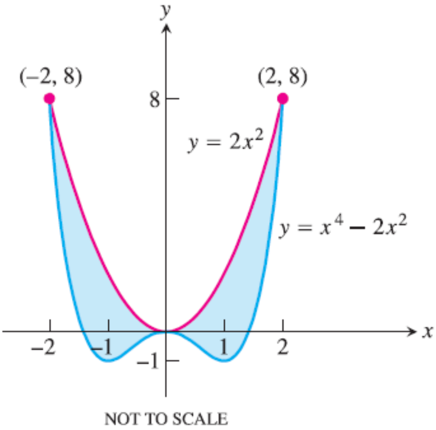
Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου στο 1 τεταρτημόριο που φράσσεται από πάνω από την $y = \sqrt{x}$, από κάτω από τον άξονα x και την ευθεία $y = x - 2$





Παραδείγματα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου ανάμεσα στην $y = 2x^2$ και $y = x^4 - 2x^2$

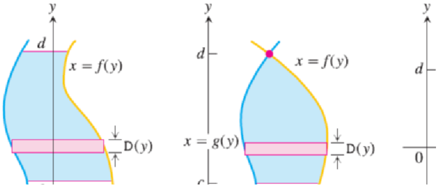


Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

Ολοκλήρωση ως προς y

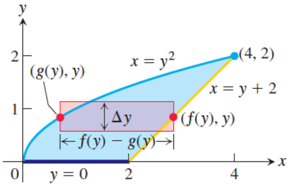
Έστω η δεξιά καμπύλη είναι η f και η αριστερή η g

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$



Παραδείγματα

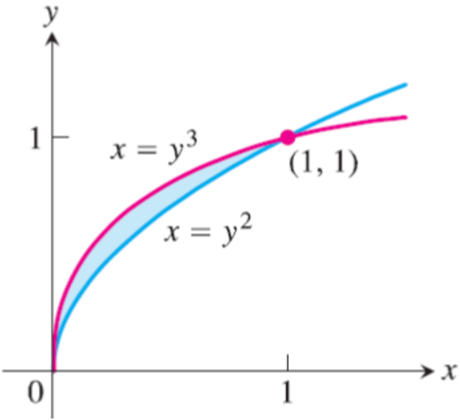
Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου στο 1 τεταρτημόριο που φράσσεται από πάνω από την $y = \sqrt{x}$, από κάτω από τον άξονα x και την ευθεία $y = x - 2$.



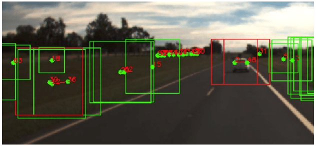
Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου που φράσσεται από την $x = y^2 - y$ και την $x = 2y^2 - 2y - 6$.

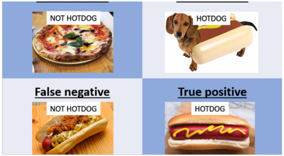
Παραδείγματα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου στο 1 τεταρτημόριο που φράσσεται την $y = \sqrt[3]{x}$ και την $y = \sqrt{x}$



Receiver Operating Characteristic (ROC) curve

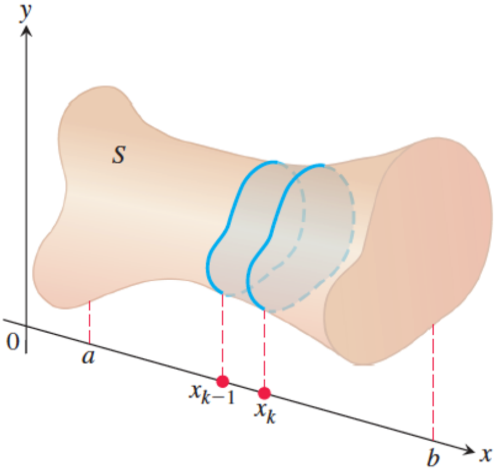




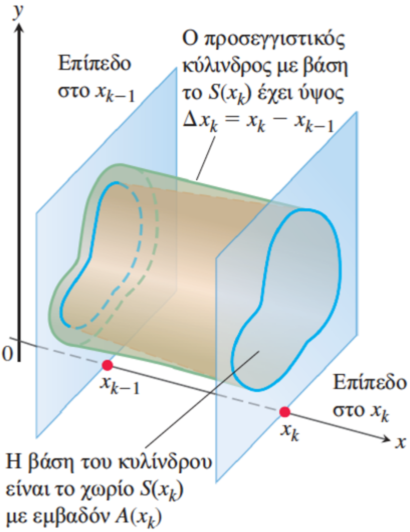
True negative Predicted negative Actual negative	**False positive** Predicted positive Actual negative
False negative Predicted negative Actual positive	**True positive** Predicted positive Actual positive

$$AUC = \int_0^1 TPR(FPR)d(FPR)$$

Διάτμηση με παράλληλα επίπεδα



Διάτμηση με παράλληλα επίπεδα



Υπολογισμοί όγκων

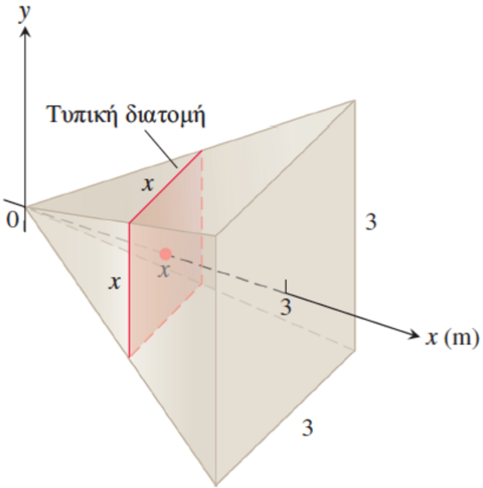
Ο όγκος ενός στερεού με ολοκληρώσημο εμβαδόν διατομής $A(x)$ από $x = a$ έως $x = b$ είναι το ολοκλήρωμα

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Υπολογισμός όγκου στερεού

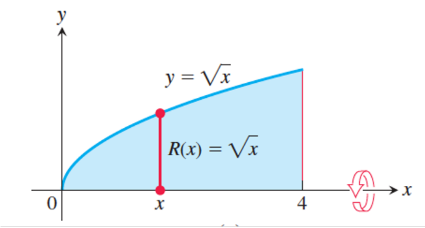
- Σχεδιάζουμε το στερεό και μια τυπική διατομή
- Βρίσκουμε ένα τύπο για το $A(x)$ μιας τυπικής διατομής
- Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης
- Ολοκληρώνουμε την συνάρτηση $A(x)$

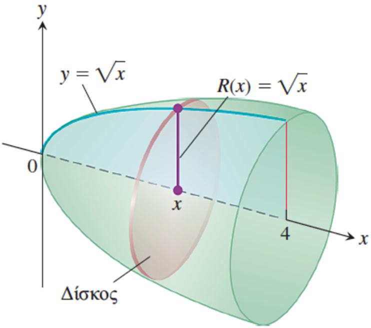
Παραδείγματα



Στερεά εκ περιστροφής

Εβαδόν δίσκου: $A(x) = \pi[R(x)]^2$





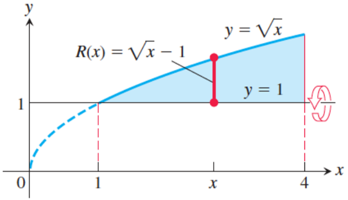
Υπολογισμός όγκου (μέθοδος των δίσκων)

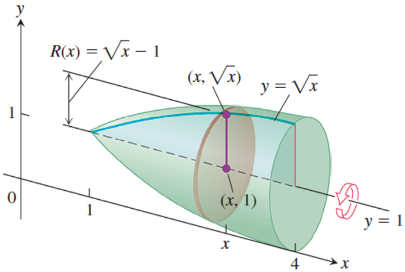
Εμβαδόν διατομής : $A(x) = \pi(R(x))^2$

Όγκος για περιστροφή γύρω από τον άξονα x

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

Στερεά εκ περιστροφής





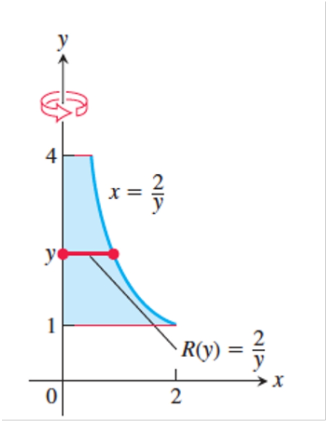
Μέθοδος των δίσκων: περιστροφή γύρω από y

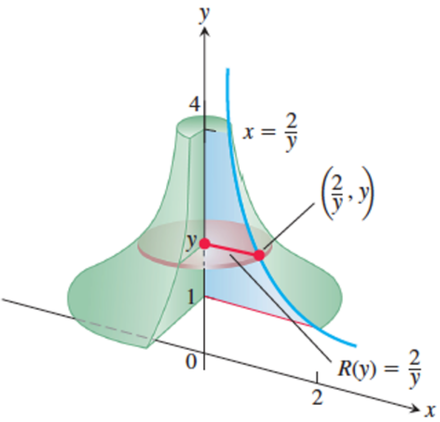
Εμβαδόν διατομής : $A(y) = \pi(R(y))^2$

Όγκος για περιστροφή γύρω από τον άξονα y

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

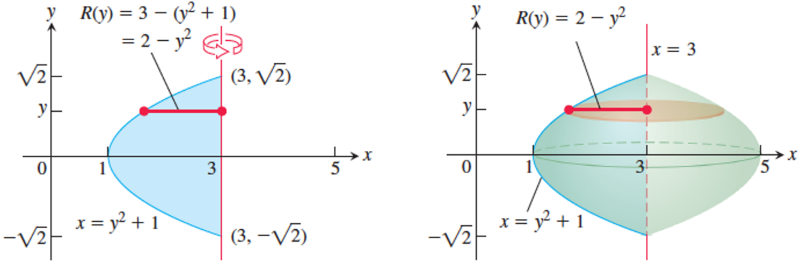
Στερεά εκ περιστροφής



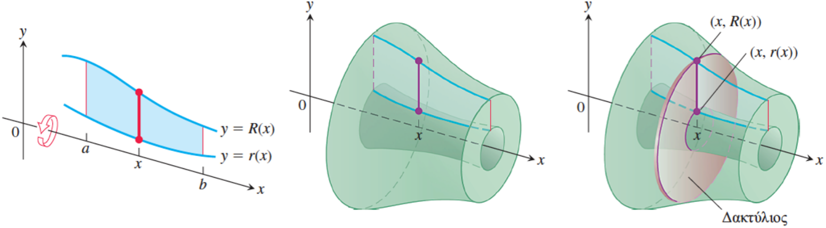


Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή ως προς $x = 3$ του χωρίου που κείται μεταξύ της παραβολής $x = y^2 + 1$ και $x = 3$



Στερεά εκ περιστροφής: μέθοδος δακτυλίων



Υπολογισμός όγκου: μέθοδος δακτυλίων

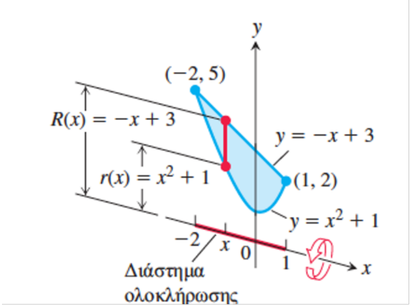
Εξωτερική ακτίνα: $R(x)$
Εσωτερική ακτίνα: $r(x)$
Εμβαδόν διατομής : $A(x) = \pi(R(x)^2 - r(x)^2)$

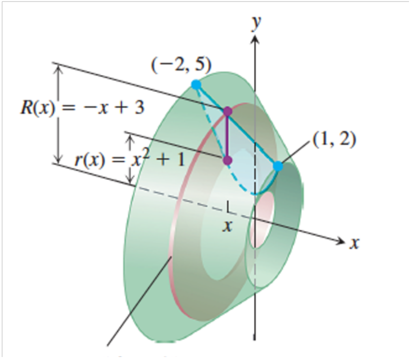
Όγκος για περιστροφή γύρω από τον άξονα x

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - r(x)]^2)dx$$

Παράδειγμα

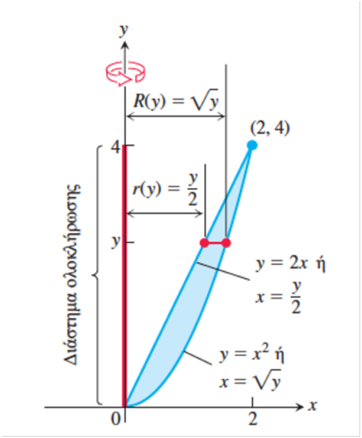
Το χωρίο που φράσσεται από την $y_1 = x^2 + 1$ και την $y_2 = -x + 3$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x και παράγει ένα στερεό. Να βρεθεί ο όγκος του.

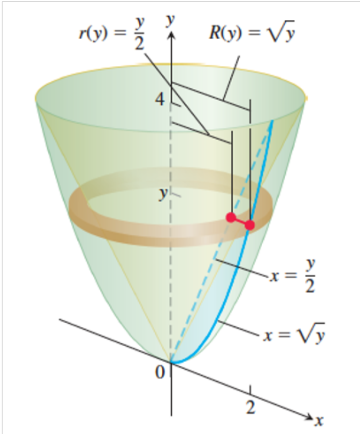




Παράδειγμα

Το χωρίο που φράσσεται από την $y_1 = x^2$ και την $y_2 = 2x$ στο πρώτο τεταρτημόριο περιστρέφεται ως προς τον άξονα y και παράγει ένα στερεό. Να βρεθεί ο όγκος του.





whiteboard

$$y_1 = 2 - x^2, \qquad y_2 = -x$$

$$h = y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow 2 - x^2 = -x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \;\Big< \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}$$

$$A = \int_a^b \overset{y_1}{f(x)} - \overset{y_2}{g(x)}\, dx = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

$y_1 = \sqrt{x}$, $\dfrac{x \quad \text{άξονα}}{y_2 = 0}$, $\dfrac{y = x - 2}{y_3 = x - 2}$

Άνω όριο $\sqrt{x}$

Κάτω όριο $\quad 0 \le x \le 2 \to y_2 = 0 \Rightarrow g_1(x) = 0$

$2 \le x \le 4 \to y_3 \Rightarrow g_2(x) = x - 2$

$0 \le x \le 2 : \quad \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$

$(x-1) \cdot (x-4) = 0 \quad x = 1, \; x = 4$

$0 \le x \le 2 : \quad f(x) - g_1(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

$2 \le x \le 4 \quad f(x) - g_2(x) = \sqrt{x} - x + 2$

$\sqrt{1} \neq 1 - 2 = -1$ για

$$A_1 = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)}_{A_2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big]_0^2 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 8 - 2 = \frac{10}{3}$$

$y=\sqrt{x}$ και $y = x-2$, x –, $y=0$

Δεξιό σύνορο $\quad x = y+2 \rightarrow f(y) = y+2 \leftarrow$

αριστ. συν. $\quad y=\sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow g(y) = y^2 \leftarrow$

$$y^2 = y+2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = +2 \end{array}$$

$$A = \int_c^d (f(y) - g(y))\,dy = \int_0^2 [y+2-y^2]\,dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$[a, b]$ υποδιαστ. Δx

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x_{k-1} - x_k$$

όγκος $\quad V_k = A(x_k) \cdot \Delta x_k$

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \Delta x_k$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \underline{A(x)}\, dx$$

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 9$$

(τμ x, x)

γεωμ. $\frac{1}{3} \cdot$ εμβ. βάσης $\cdot$ ύψος =

$$= \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 9$$

$y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ περιστρ $x'x$ $y=0$

$$V = \int_a^b \pi \underbrace{(R(x))^2}_{A(x)} dx = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$= \pi \left. \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \cdot \frac{4^2}{2} = 8\pi$$

$\Rightarrow$ $R(x) = \sqrt{x} - 1$ περ. $y=1$

$$V = \int_1^4 \pi (R(x))^2 dx = \int_1^4 \pi (\sqrt{x} - 1)^2 dx =$$

$$= \pi \int_1^4 x - 2\sqrt{x} + 1 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4$$

$$= \frac{7\pi}{6}$$

$$R(y) = \frac{2}{y}$$

$$V = \int_1^4 \pi (R(y))^2 \, dy = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \, dy =$$

$$= 4\pi \int_1^4 \frac{1}{y^2} \, dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \frac{3}{4} = 3\pi,$$

$$\hookrightarrow 4\pi \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{1}\right]$$

$$\approx \int_1^4 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^4 \frac{1}{t^2} \, dt$$

περιστροφή $x=3$, χωρίο ανάμεσα

$\underline{x_1 = y^2+1}$, $x_2 = 3$

$$y^2+1=3 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi (R(y))^2 dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi (2-y^2)^2 dy$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4-4y^2+y^4 \, dy \Rightarrow$$

$$\pi\left[4y-\frac{4y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$