Διάλεξη 14: Υπολογισμός εμβαδών

Ανακοινώσεις

2 σετ ασκήσεων: Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει ηλεκτρονικά μέχρι και τις **20/11/2023** και ώρα 23:59 από την ιστοσελίδα του μαθήματος στο *eLearn*.

Πρόοδος Σάββατο 25/11 στις 14:00

Εμβαδόν χωρίου μη αρνητικής συνάρτησης

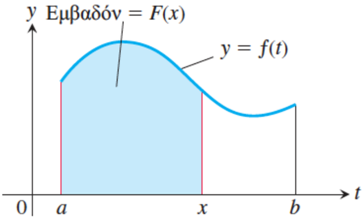
Αν η $y = f(x)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσημη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι το ολοκήρωμα της f από a έως b

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ολοκλήρωμα ως συνάρτηση

Αν η είναι $f(t)$ ολοκληρώσημη συνάρτηση στο διάστημα I, τότε από ένα αριθμό $a \in I$ εως ένα άλλο αριθμό $x \in I$ ορίζεται μια νεα συνάρτηη F της οποία η τιμή στο x είναι

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού (μέρος 1)

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) και η παράγωγος της είναι η $f(x)$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού (μέρος 2)

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η F μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο $[a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Σχέση ολοκλήρωσης και παραγώγησης

- Αν πρώτα ολοκληρώσουμε και μετά παραγωγίσουμε την f, παίρνουμε ξανά την f

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

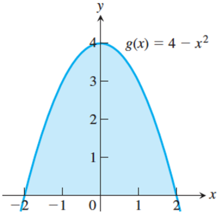
- Αν πρώτα παραγωγίσουμε την F και μετά ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα, παίρνουμε ξανά την F

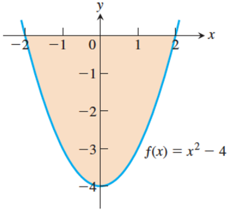
$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

Ολικό εμβαδόν

Το εμβαδόν είνα πάντα θετικός αριθμός.

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική, τότε $A = \int_a^b f(x)dx$
- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι αρνητική, τότε $A = -\int_a^b f(x)dx$





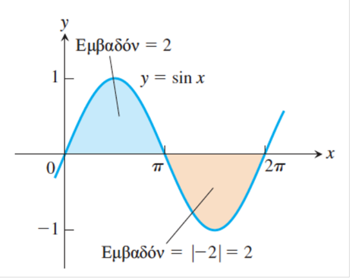
Ολικό εμβαδόν

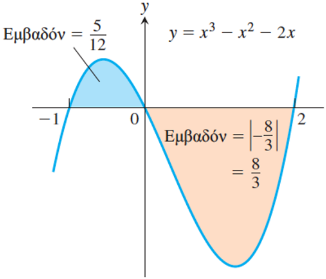
1. Υποδιαιρούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα που ορίζονται από τα σημεία μηδενισμού
2. Ολοκληρώνουμε σε κάθε διάστημα
3. Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές

Παραδείγματα

Να υπολογιστεί το εμβαδόν

- μεταξύ της $\sin x$ και του άξονα $x'x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$
- μεταξύ της $y = x^3 - x^2 - 2x$ και του άξονα $x'x$ στο διάστημα $[-1, 2]$





Αντίστροφος κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$du = \frac{du}{dx} dx$

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

- $\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx$
- $\int \sqrt{2x + 1}$

Κανόνας αντικατάστασης

Αν η $u = g(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση με πεδίο τιμών ένα διάστημα I και η f είναι συνεχής I στο τότε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Μέθοδος αντικατάστασης

1. Αντικαθιστούμε $u = g(x)$ και $du = \frac{du}{dx}dx = g'(x)$ και προκύπτει το $\int f(u)du$
2. Ολοκληρώνουμε ως προς u
3. Αντικαθηστούμε το u με το $g(x)$

Παραδείγματα

Να βρεθούν τα

- $\int \sec^2(5x+1)5dx$
- $\int \cos(7\theta+3)d\theta$
- $\int x^2\cos(x^3)dx$
- $\int x\sqrt{2x+1}dx$

Αντικατάσταση σε ορισμένα ολοκληρώματα

Αν η g' είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και η f είναι συνεχής στο πεδίο τιμών της $g(x) = u$, τότε

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Παραδείγματα

Να υπολογιστεί το $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

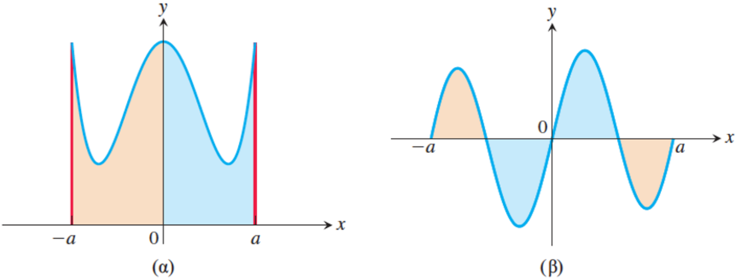
Να υπολογιστούν τα $\int_{0}^{1} r\sqrt{1-r^2}dr$ και $\int_{-1}^{1} r\sqrt{1-r^2}dr$

Να υπολογιστούν τα $\int (1-\cos 3t)\sin 3t dt$ στα $[0, \pi/6]$ και $[\pi/6\pi/3]$

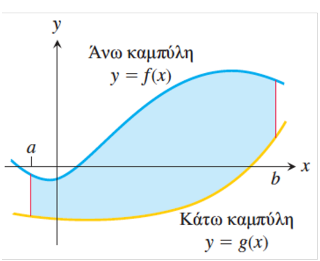
Ολοκλήρωση συμμετρικών συναρτήσεων

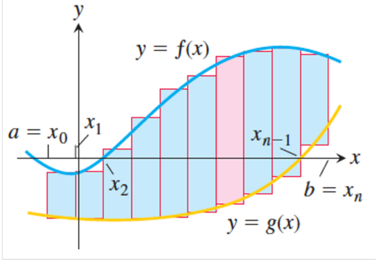
Έστω η f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a, a]$

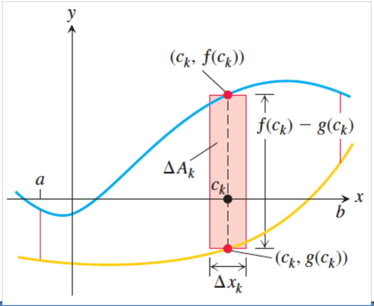
- Αν η είναι άρτια τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Αν η είναι περιττή τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



Εμβαδά μεταξύ καμπυλών







Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

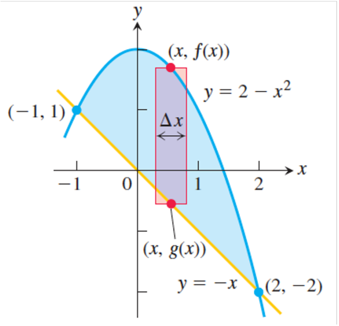
Αν οι f και g είναι συνεχής με $f(x) \geq g(x)$ παντού στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y = f(x)$ και $y = g(x)$ από το a έως το b είναι το ολοκλήρωμα της $(f - g)$ από το a έως το b

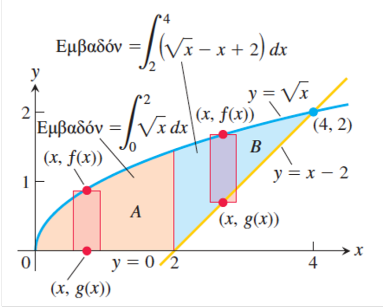
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Παραδείγματα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου ανάμεσα στην $y = 2 - x^2$ και $y = -x$

Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου στο 1 τεταρτημόριο που φράσσεται από πάνω από την $y = \sqrt{x}$, από κάτω από τον άξονα x και την ευθεία $y = x - 2$



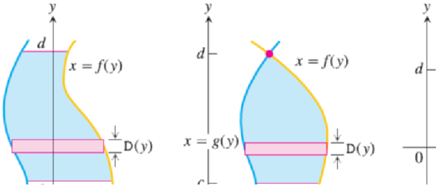


Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

Ολοκλήρωση ως προς y

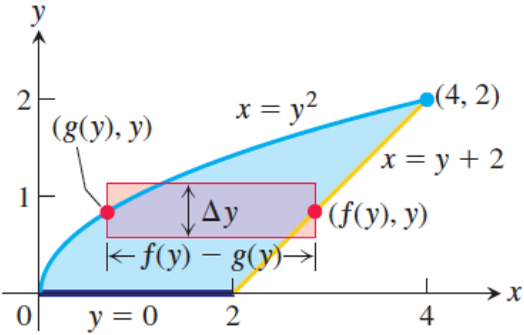
Έστω η δεξιά καμπύλη είναι η f και η αριστερή η g

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$



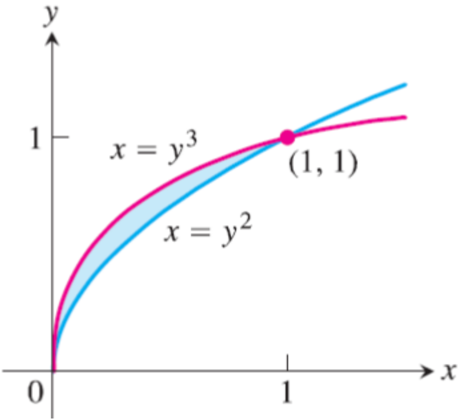
Παραδείγματα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου στο 1 τεταρτημόριο που φράσσεται από πάνω από την $y = \sqrt{x}$, από κάτω από τον άξονα x και την ευθεία $y = x - 2$

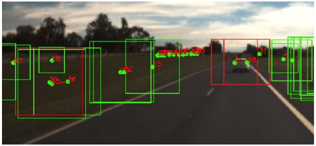


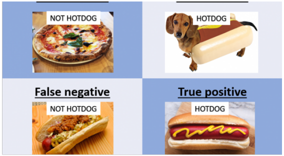
Παραδείγματα

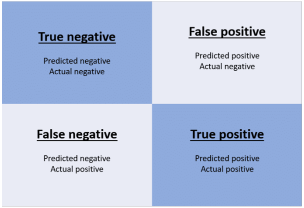
Να βρεθεί το εμβαδόν του χώρου στο 1 τεταρτημόριο που φράσσεται την $y = \sqrt[3]{x}$ και την $y = \sqrt{x}$

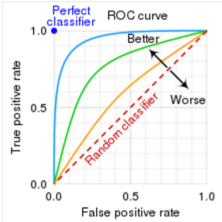


Receiver Operating Characteristic (ROC) curve









$$AUC = \int_0^1 TPR(FPR)d(FPR)$$

whiteboard

$$\int_{-2}^{0} (2x+5)\,dx \qquad f(x) = 2x+5$$

$$F(x) = \frac{2x^2}{2} + 5x = x^2 + 5x + c$$

$$\int_{-2}^{0} \overbrace{2x+5}^{f(x)}\,dx = F(0) - F(-2) = \Big[x^2 + 5x\Big]_{-2}^{0} = 0 - (4-10) = 6$$

$$\Big[x^2 + 5x + c\Big]_{-2}^{0} = (0+0+c) - (4-10+c) = 6 + c - c = 6$$

- $$\int_{0}^{\pi} (1+\cos x)\,dx = \Big[x + \sin x\Big]_{0}^{\pi} = (\pi + \sin\pi) - (0 + \sin 0) = \pi$$

$$\int_1^{-1}(r+1)^2\,dr = \int_1^{-1}(r^2+2r+1)\,dr = \frac{r^3}{3}+r^2+r\Big]_1^{-1}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}+1-1\right]-\left(\frac{1}{3}+1+1\right) = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-4}^{4}|x|\,dX = \int_{-4}^{0}|x|\,dx + \int_{0}^{4}|x|\,dX =$$

$$= \int_{-4}^{0}-x\,dx + \int_{0}^{4}x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left[0-\left(-\frac{16}{2}\right)\right]+\left[\frac{16}{2}-0\right] = 16$$

$f(x) = \sin x \qquad x=0 \rightarrow x=2\pi$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big]_0^{2\pi} =$$

$$= -\left(\cos(2\pi) - \cos(0)\right) = -(1-1) = 0$$

$$\cos(\pi) - \cos(0)$$

$$A_1 = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = -\left(\cancel{\cos}(\pi) - \cos(0)\right) =$$

$$= -(-1-1) = 2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos(x) \Big]_{\pi}^{2\pi} = -2$$

$$\int_0^{2\pi} \cancel{\cos \sin x}\,dx \qquad A = A_1 + |A_2| = 2+2=4$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x\,(x^2 - x - 2)$$
$$= x \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

ρίζες $0, -1, 2$

$$\int_{-1}^{0} x^3 - x^2 - 2x \, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Big]_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} x^3 - x^2 - 2x \, dx = -\frac{8}{3}$$

$$A = \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}$$

$u(x)$ διαφορ , n τυχαίο $n \neq -1$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du(x)}{dx}$$

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (x^3+x)^5 (3x^2+1)\,dx$$

$$u(x) = x^3 + x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow du = u'(x)\,dx = \underbrace{(3x^2+1)}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2+1$$

$$\int \underbrace{(x^3+x)^5}_{u(x)} \cdot \underbrace{(3x^2+1)\,dx}_{du} = \int u^5(x) \cdot du = \frac{u^6}{6} + c =$$

$$= \frac{(x^3+x)^6}{6} + c$$

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int (2x+1)^{1/2}\,dx$$

$$u(x) = 2x+1 \quad , \quad n = \frac{1}{2}$$

$$du = u'(x)\,dx = \underbrace{2\,dx}$$

$$\frac{1}{2}\int u^{1/2}\underbrace{2\,dx} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u(x)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{1/2} dx$$

$$u(x) = 2x+1 \quad , \quad n = \frac{1}{2}$$

$$du = u'(x)dx = \underbrace{2dx}$$

$$\frac{1}{2}\int u^{1/2} \underbrace{2dx} = \frac{1}{2}\int u^{1/2} du = \frac{1}{2}\,\frac{u(x)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$