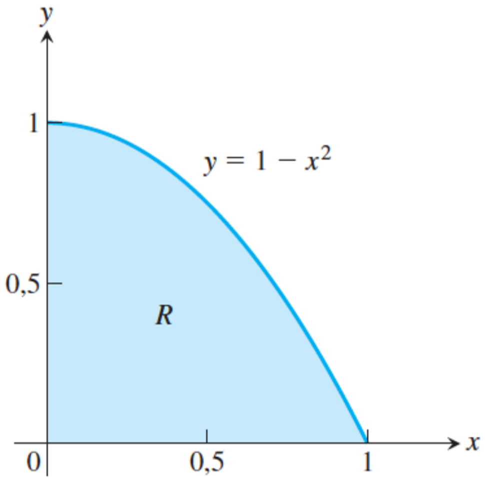
Διάλεξη 13: Αθροίσματα *Riemann* και Ορισμένα Ολοκληρώματα

Ανακοινώσεις

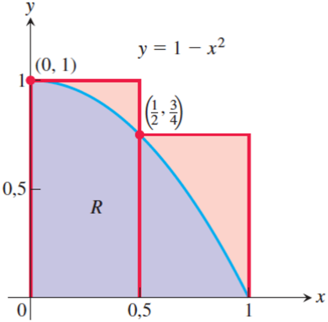
2 σετ ασκήσεων: Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει ηλεκτρονικά μέχρι και τις **20/11/2023** και ώρα 23:59 από την ιστοσελίδα του μαθήματος στο *eLearn*.

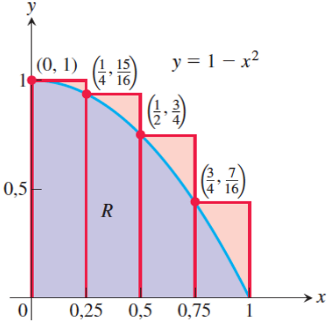
Πρόοδος Σάββατο 25/11 στις 14:00

Εκτίμηση Εμβαδού

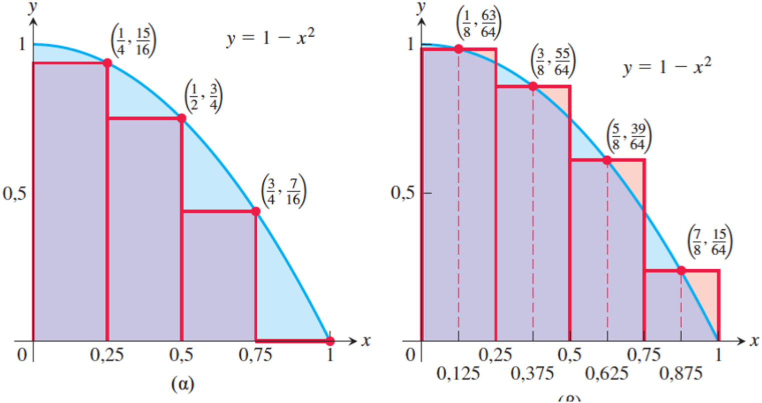


Εκτίμηση Εμβαδού

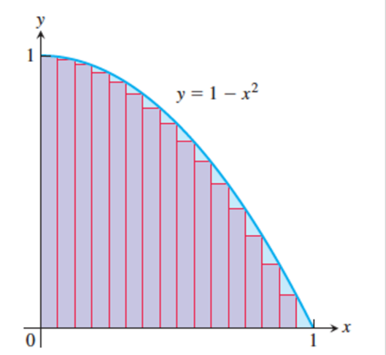


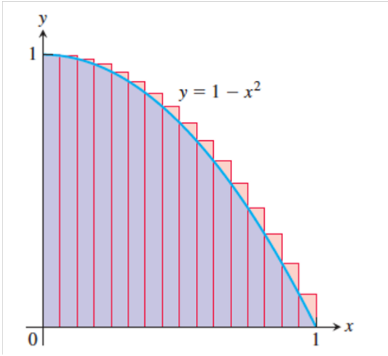


Εκτίμηση Εμβαδού

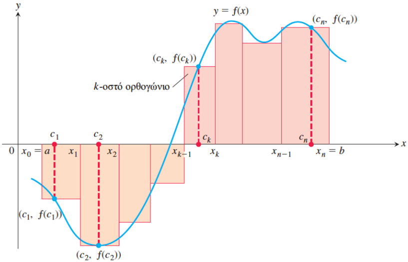


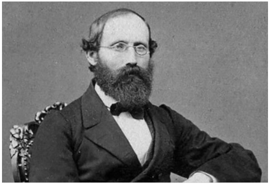
Εκτίμηση Εμβαδού





Άθροισμα *Riemann*





Bernhard Riemann
1826-1866

$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, όπου $\|P\|$ μέγιστο πλάτος υποδιαστήματος

Για $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{(b-a)}{n}) \cdot \frac{(b-a)}{n}$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Λέμε ότι ένα αριθμός J είναι το ορισμένο ολοκληρώμα της $f(x)$ στο $[a, b]$ και ότι το J ειναι το όριο των αθροισμάτω *Riemman* $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ αν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

Για οποιοδήποτε αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχος αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε διαμέρηση $P = \{x_0, x_1, \cdots, _n\}$ του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$ και για τυχαία επιλογή c_k στο $[x_{k-1}, x_k]$, έχουμε

$$|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J| < \epsilon$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα υπάρχει αν πέρνουμε τις ίδες τιμές ανεξάρτητα από τις επιλογές.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα υπάρχει όταν

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = J$$

Τότε αντί για J γράφουμε

$$\int_a^b f(x)dx$$

Τύπος αθροίσματος *Riemann* για υποδιαστήματα ίσου πλάτους

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{(b-a)}{n}) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ ή αν η έχει πεπερασμένες στο πλήθος ασυνέχειες άλματος σε αυτό το διάστημα, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ υπάρχει και η f είναι ολοκληρώσημη στο $[a, b]$.

- Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι ολοκληρώσημη

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

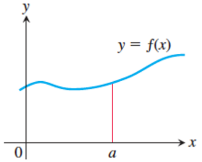
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

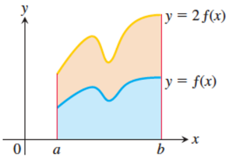
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων



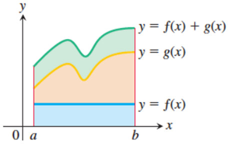
(α) *Διάστημα μηδενικού πλάτους:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



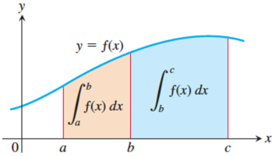
(β) *Σταθερό πολλ/σιο:* $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$



(γ) *Άθροισμα: (αθροίζονται τα εμβαδά)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



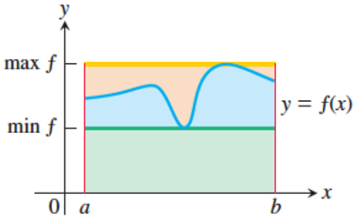
(δ) *Αθροιστικότητα:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

Αν $\min(f(x)) \leq f(x) \leq \max(f(x))$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε

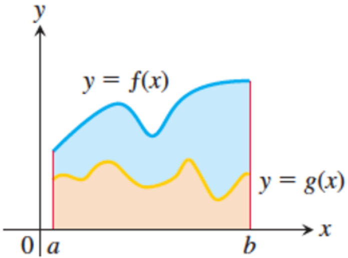
$$\min(f(x)) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max(f((x)) \cdot (b - a)$$



Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

Αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Αν $f(x) \geq 0$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$



Εμβαδόν χωρίου μη αρνητικής συνάρτησης

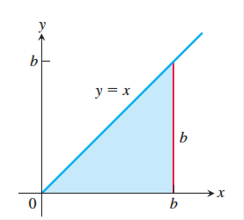
Αν η $y = f(x)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσημη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι το ολοκήρωμα της f από a έως b

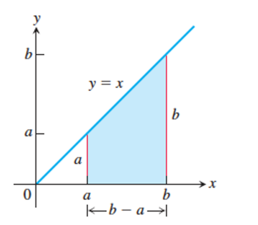
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_0^b x dx$ και να βρεθεί το εμβαδόν Α κάτω από την $y = x$ στο $[0, b], b > 0$

Να γενικευθεί το παράδειγμα για $[a, b], 0 < a < b$

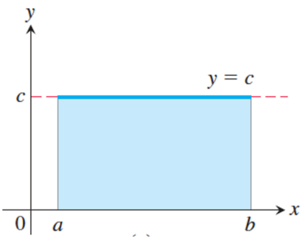


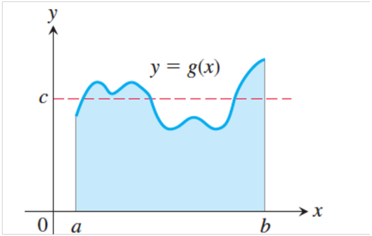


(α)

Μέση τιμή μη αρνιτική συνεχούς συνάρτησης

Η μέση τιμή της $f(x) = c$ στο $[a, b]$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου δια του $b - a$.
Η μέση τιμή της $g(x)$ στο $[a, b]$ είναι το εμβαδόν του χώρου κάτω από την γραφική παράσταση δια του $b - a$.





Μέσος όρος

Αν η f είναι ολοκληρώσημη στο $[a, b]$, τότε η μέση τιμή της f στο διάστημα $[a, b]$ ονομάζεται μέσος όρος και ισούτε με

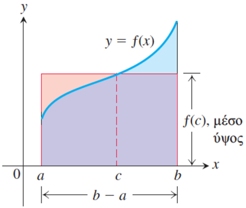
$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

- Να υπολογιστεί η μέση τιμή της $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ στο διάστημα $[-2, 2]$

Θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε σε κάποιο σημειο $c \in [a, b]$ θα ισχύει

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

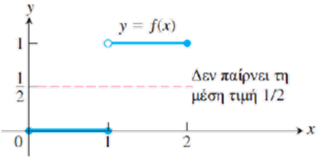


ΣΧΗΜΑ 5.16 Η τιμή $f(c)$ στο θεώρημα μέσης τιμής είναι, ουσιαστικά, το μέσο ύψος της f στο $[a, b]$. Όταν $f \geq 0$, το εμβαδόν του ορθογωνίου ισούται με το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημα της f από το a έως το b

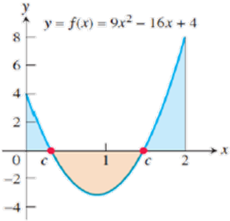
$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

- Η συνέχεια της *f* είναι σημαντική. Μια ασυνεχής συνάρτηση μπορεί να μην ισούται ποτέ με την μέση τιμή της. Π.χ.



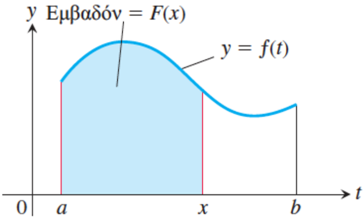
<u>Ασκ.</u> Δείξτε ότι αν η *f* είναι συνεχής στο [a, b], a≠b, και αν $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ τότε θα ισχύει ότι η *f(x)* = 0 τουλάχιστον μια φορά στο διάστημα [a, b].



Ολοκλήρωμα ως συνάρτηση

Αν η είναι $f(t)$ ολοκληρώσημη συνάρτηση στο διάστημα I, τότε από ένα αριθμό $a \in I$ εως ένα άλλο αριθμό $x \in I$ ορίζεται μια νεα συνάρτηη F της οποία η τιμή στο x είναι

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού (μέρος 1)

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) και η παράγωγος της είναι η $f(x)$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Παραδείγματα

- Να βρεθεί το $\frac{dy}{dx}$ για την $y = \int_a^x (t^3 + 1)dt$
- Να βρεθεί το $\frac{dy}{dx}$ για την $y = \int_x^5 (3t \sin(t))dt$
- Να βρεθεί το $\frac{dy}{dx}$ για την $y = \int_1^{x^2} \cos(t)dt$

Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού (μέρος 2)

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η F μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο $[a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

- $\int_{-2}^{0} 2x + 5dx$
- $\int_{0}^{\pi} (1 + \cos(x))dx$
- $\int_{1}^{-1} (r+1)^2 dr$
- $\int_{-4}^{4} |x| dx$

whiteboard

Εμβαδόν $y = x$ $[0, b]$, $b > 0$  $\to A = \frac{1}{2} \cdot b b = \frac{b^2}{2}$

① $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$

$[0, b] \to$ $\Delta x = \frac{b - 0}{n} = \frac{b}{n}$, $P = \{0, \frac{b}{n}, 2\frac{b}{n}, \dots \frac{nb}{n}\}$

$c_k = k \cdot \frac{b}{n}$

① $\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} k \frac{b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} k \frac{b^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k =$

$= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n \to \infty}$, $\|P\| \to 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^2}{2} \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{b^2}{2} = \int_0^b x \, dx$

(a, b)

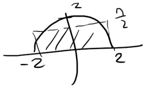
$$\int_a^b x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx$$

$$\left[\int_0^a x\,dx + \int_a^b x\,dx = \int_0^b x\,dx\right]$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 4$$



$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi \, 2^2 = 2\pi$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = A = 2\pi$$

M.T. $\quad av(f) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{2-(-2)} \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{-2}^{0} (2x+5)\,dx$$

$$f(x) = 2x+5$$

$$F(x) = \frac{2x^2}{2} + 5x = x^2 + 5x + \underline{c}$$

$$\int_{-2}^{0} \overbrace{2x+5}^{f(x)}\,dx = F(0) - F(-2) = \left[x^2+5x\right]_{-2}^{0} = 0 - (4-10) = 6$$

$$\left.x^2+5x+c\right]_{-2}^{0} = (0+0+c) - (4-10+c) =$$

$$= 6 + \underline{c - c} = 6$$

- $$\int_0^{\pi} (1+\cos x)\,dx = \left[x+\sin x\right]_0^{\pi} = (\pi + \sin\pi) - (0+\sin 0) = \pi$$

$$\int_1^{-1}(r+1)^2\,dr = \int_1^{-1}(r^2+2r+1)\,dr = \left.\frac{r^3}{3}+r^2+r\right]_1^{-1}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}+1-1\right] - \left(\frac{1}{3}+1+1\right) = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-4}^{4}|x|\,dX = \int_{-4}^{0}|x|\,dx + \int_0^4 |x|\,dX =$$

$$= \int_{-4}^{0}-x\,dx + \int_0^4 x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \left[0-\left(-\frac{16}{2}\right)\right] + \left[\frac{16}{2}-0\right] = 16$$