Διάλεξη 12: Αόριστα Ολοκληρώματα και Αθροίσματα *Riemann*

Αντιπαράγωγοι

Μια συνάρτηση F είναι αντιπαράγωγος της f σε ένα διάστημα I αν $F'(x) = f(x)$ για x καθε στο I.

Αν η F είναι μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η γενική μορφή της αντιπαραγώγου της f στο I ειναι η $F(x) + C$ όπου C μια αυθέρετη σταθερά.

Κανόνες για πράξεις αντιπαραγώγων

Συνάρτηση	Αντιπαράγωγος
$kf(x)$	$kF(x) + C$, οπου k σταθερά
$-f(x)$	$-F(x) + C$
$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Παράδειγμα: Βρείτε την αντιπαράγωγο της $f(x) = 3\sqrt{x} + \sin 2x$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Η συλλογή όλων των αντιπαραγώγων της f ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f ως προς x, και συμβολίζεται ως

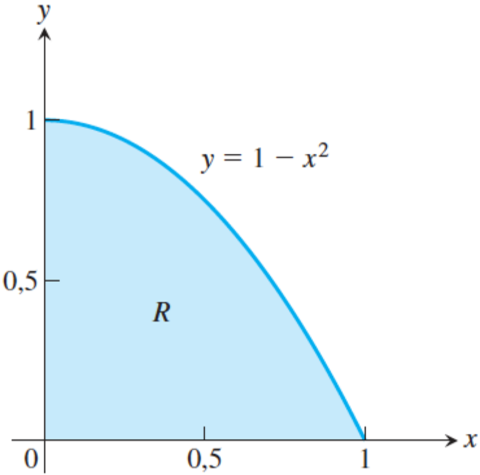
$$\int f(x)dx$$

Το σύμβολο $\int$ είναι το σύμβολο της ολοκλήρωσης, η συνάρτηση f είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση και το x είναι η μεταβλητή ολοκήρωσης.

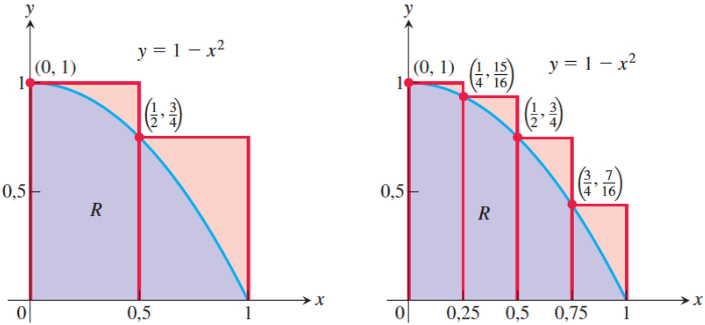
Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x ισούται με

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

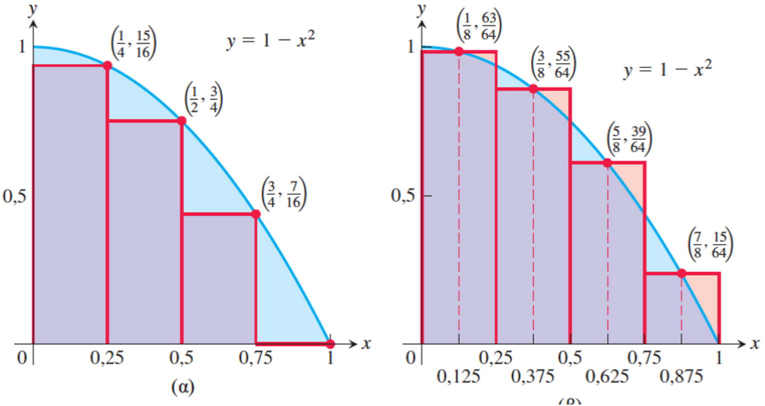
Εκτίμηση Εμβαδού



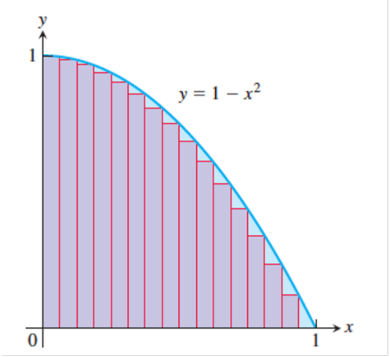
Εκτίμηση Εμβαδού

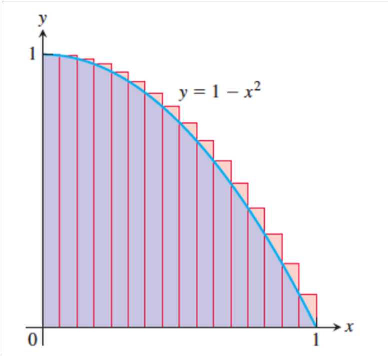


Εκτίμηση Εμβαδού



Εκτίμηση Εμβαδού





Εκτίμηση Εμβαδού

Number of subintervals	Lower sum	Midpoint rule	Upper sum
2	.375	.6875	.875
4	.53125	.671875	.78125
16	.634765625	.6669921875	.697265625
50	.6566	.6667	.6766
100	.66165	.666675	.67165
1000	.6661665	.66666675	.6671665

Πεπερασμένα αθροίσματα

Συμβολισμός σίγμα

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

όπου ο δείκτης κ αρχίζει από το 1 και τελειώνει στο $k = n$, και a_k είναι ο τύπος για το κ-οστό όρο.

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2$
- $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(1000) = \sum_{i=1}^{1000} f(i)$

Αλγεβρικοί κανόνες για πεπερασμένα αθροίσματα

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$	$\sum_{k=1}^{n}(a_k) + \sum_{k=1}^{n}(b_k)$
$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$	$\sum_{k=1}^{n}(a_k) - \sum_{k=1}^{n}(b_k)$
$\sum_{k=1}^{n}(ca_k)$	$c \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k)$
$\sum_{k=1}^{n} c$	$n \cdot c$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

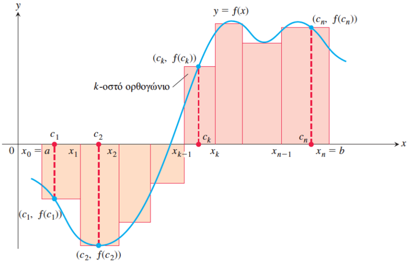
Να υπολογιστούν τα $\sum_{k=1}^{3}(k+4)$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$

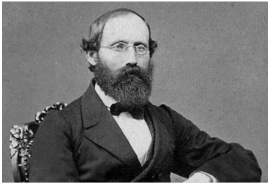
Χρήσιμα αθροίσματα

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Άθροισμα *Riemann*



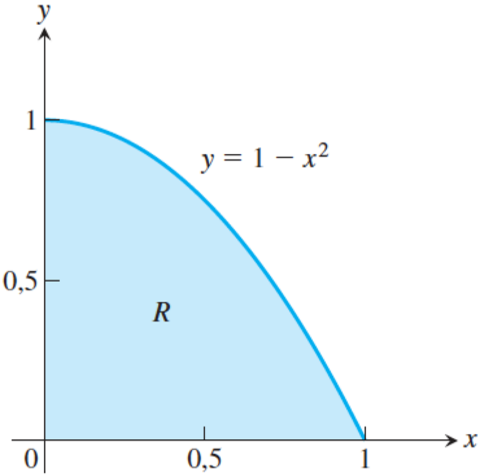


Bernhard Riemann
1826-1866

$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, όπου $\|P\|$ μέγιστο πλάτος υποδιαστήματος

Για $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{(b-a)}{n}) \cdot \frac{(b-a)}{n}$

Εκτίμηση Εμβαδού



Ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Λέμε ότι ένα αριθμός J είναι το ορισμένο ολοκληρώμα της $f(x)$ στο $[a, b]$ και ότι το J ειναι το όριο των αθροισμάτω *Riemman* $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ αν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

Για οποιοδήποτε αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχος αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε διαμέρηση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$ και για τυχαία επιλογή c_k στο $[x_{k-1}, x_k]$, έχουμε

$$| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J |< \epsilon$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα υπάρχει αν πέρνουμε τις ίδες τιμές ανεξάρτητα από τις επιλογές P και c_k .

Το ορισμένο ολοκλήρωμα υπάρχει όταν

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = J$$

Συμβολισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Αν το ορισμένο ολοκλήρωμα υπάρχει, αντί για J γράφουμε

$$\int_a^b f(x)dx$$

όπου $\Delta x \to dx$

- Ο συμβολισμός δεν έχει σημασία $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$

Τύπος αθροίσματος *Riemann* για υποδιαστήματα ίσου πλάτους

Αν όλα τα διαστήματα έχουν ίδιο πλάτος, $\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

Παραδείγματα

Να εκφραστούν τα παρακάτω όρια σαν ολοκληρώματα

- $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$ όπου P μια διαμέρηση του $[0, 2]$
- $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ όπου P μια διαμέρηση του $[2, 3]$

Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ ή αν η έχει πεπερασμένες στο πλήθος ασυνέχειες άλματος σε αυτό το διάστημα, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ υπάρχει και η f είναι ολοκληρώσημη στο $[a, b]$.

- Η συνάρτηση $f(x)$ ΔΕΝ είναι ολοκληρώσημη

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

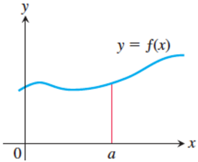
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

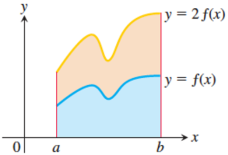
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων



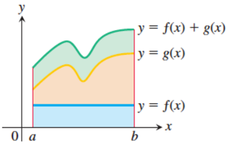
(α) *Διάστημα μηδενικού πλάτους:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



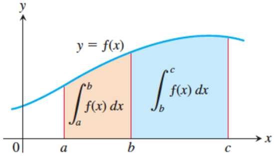
(β) *Σταθερό πολλ/σιο:* $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$



(γ) *Άθροισμα: (αθροίζονται τα εμβαδά)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



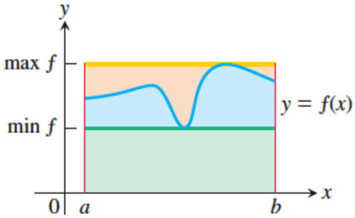
(δ) *Αθροιστικότητα:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

Αν $\min(f(x)) \leq f(x) \leq \max(f(x))$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε

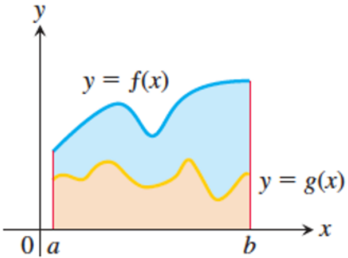
$$\min(f(x)) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max(f((x)) \cdot (b-a)$$



Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

Αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Αν $f(x) \geq 0$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$



Παραδείγματα

- Έστω $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_1^5 f(x)dx = 6$, $\int_1^5 g(x)dx = 8$

  Να βρεθούν τα $\int_2^2 g(x)dx$, $\int_5^1 g(x)dx$, $\int_2^5 f(x)dx$, $\int_1^5 (4f(x) - g(x))dx$
- Να υπολογιστεί το $\int_a^b c dx$

whiteboard

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

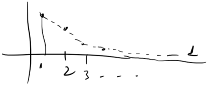
$$2(1+2+3+\dots+n) = 1+2+3\dots+n+(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1$$

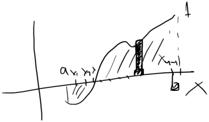
$$(1+n)+\underbrace{(1+n)+(1+n)\dots}_{n \text{ όρους}}+(1+n) = n\cdot(1+n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(1+n)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{3}(k+4) = \sum_{k=1}^{3}k + \sum_{k=1}^{3}4 = (1+2+3) + 4\cdot 3 = 18$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{1}{n}\cdot n = 1$$



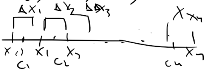


f ορισμένη σε $[a,b]$, $f>0$ ή $f<0$ ή $f=0$

$[a,b]$: $\underset{x_0}{a} < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < \underset{x_n}{b}$

$[a,b]$: $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n$

$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ διαμ $[a,b]$ $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$



επιλ. $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ / $f(c_k) = f(a + k\frac{b-a}{n})$

$S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \, \Delta x \qquad P \in [0, 2]$$

$$\int_0^2 x^2 \, dx$$

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k} \Delta x \qquad P \in [2, 3]$$

$$\Delta x \to dx$$

$$c_k \to x$$

$$\int_2^3 \frac{1}{1 - x} \, dx$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 5$$

$$\int_1^2 f(u)\,du = 5, \qquad \int_2^1 f(x)\,dx = -\int_1^2 f(x)\,dx = -5$$