Διάλεξη 11: Ακρότατα συναρτήσεων, Αντιπαράγωγοι, Αόριστο ολοκλήρωμα

Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του Π.Ο της και αν η $f'(x)$ ορίζεται στο c τότε $f'(c) = 0$

- ¨Ενα εσωτερικό σημείο του Π.Ο μιας συνάρτησης f όπου η $f'(x) = 0$ ή δεν ορίζεται λέγεται κρίσιμο σημείο της f

Εύρεση ολικών ακροτάτων

Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα μια συνεχούς συνάρτησης f σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο διάστημα
2. Υπολογίζουμε τις τιμές στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα
3. Πέρνουμε την μέγιστη/ελάχιστη τιμή

Μονότονες συναρτήσεις

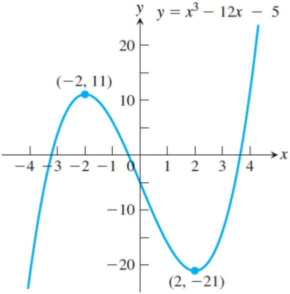
Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b)

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$

Μονότονες συναρτήσεις

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και τα ανοικτά διαστήματα που η $f(x)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Διάστημα	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Πρόσημο f'	+	−	+
Συμπεριφορά της f	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα

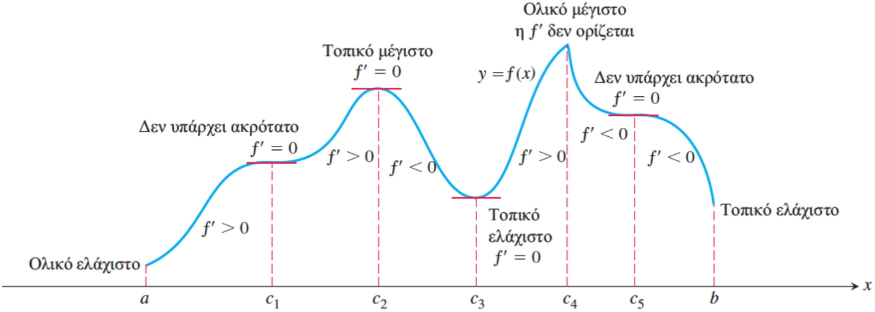


Κριτήριο 1ης παραγώγου

Έστω c κρίσιμο σημείο της συνεχούς συνάρτησης f, και η f ειναι διαφορίσιμη σε κάθε σημειο κάποιου διαστήματος που περιέχει το c (εκτός ενδεχομένως από το ίδιο το c). Διασχίζοντας το διάστημα από αριστερά προς τα δεξιά

- αν η f' μεταβάλλεται από αρνητική σε θετική στο c, τοτε η f εμφανίζει τοπικό **ελάχιστο** στο c
- αν η f' μεταβάλλεται από θετική σε αρνητική στο c, τοτε η f εμφανίζει τοπικό **μέγιστο** στο c
- αν η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο c, τότε η f **δεν** εμφανίζει τοπικό ακρότατο στο c

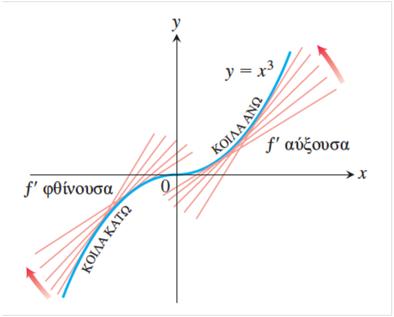
Κριτήριο 1ης παραγώγου

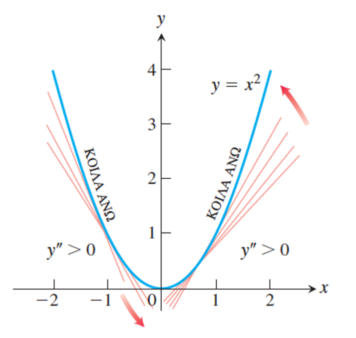


Κυρτότητα

Η γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ στρέφει

- τα κοίλα άνω σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η $f'(x)$ είνα αύξουσα στο I.
- τα κοίλα κάτω σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η $f'(x)$ είνα φθίνουσα στο I.





Κυρτότητα: κριτήριο 2ης παραγώγου

Έστω $y = f(x)$ διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα

- Αν $f'' > 0$ στο I,η γραφική παράσταση της f στο I στρέφει τα κοίλα άνω.
- Αν $f'' < 0$ στο I,η γραφική παράσταση της f στο I στρέφει τα κοίλα κάτω.

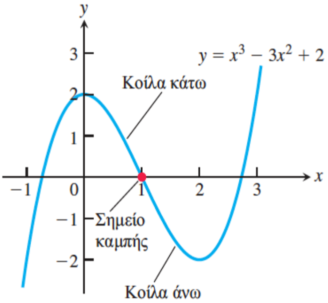
Σημείο καμπής

Ένα σημειο $(c, f(c))$ όπου η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει εφαπτομένη και αλλάζει κοιλότητα ονομάζεται σημείο καμπής

Σε ένα σημείο $(c, f(c))$ καμπής είτε $f''(c) = 0$ ή η $f''(c)$ δεν υπάρχει

Παράδειγμα

Προσδιορίστε την κοιλότητα και βρείτε τα σημεία καμπής
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



Κριτήριο 2ης παραγώγου

Έστω ότι η f'' είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $x = c$.

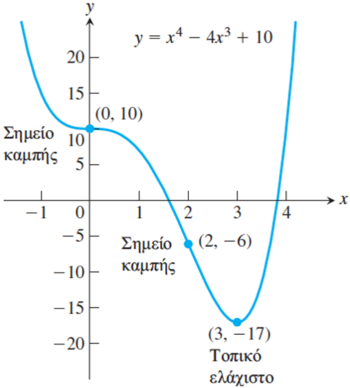
1. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$ τότε η εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$.
2. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$ τότε η εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$.
3. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) = 0$ τότε τότε δεν ξέρουμε. Μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο, ελάχιστο ή τίποτα από τα δύο.

Κατασκευή γραφίματος

1. Βρίσκουμε το πεδιο ορισμού και πιθανές συμμετρίες
2. Βρίσκουμε τις παραγώγους
3. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία
4. Βρίσκουμε μονοτονία ανα διαστήματα
5. Βρίσκουμε σημεία καμπής και προσδιορίζουμε την κοιλότητα
6. Βρίσκουμε ασύμπτωτες αν υπάρχουν
7. Σχεδιάζουμε την καμπύλη

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί μια πρόχειρη γραφική παράσταση της
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$



Αντιπαράγωγοι

Μια συνάρτηση F είναι αντιπαράγωγος της f σε ένα διάστημα I αν $F'(x) = f(x)$ για x καθε στο I.

Αν η F είναι μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η γενική μορφή της αντιπαραγώγου της f στο I ειναι η $F(x) + C$ όπου C μια αυθέρετη σταθερά.

Κανόνες για πράξεις αντιπαραγώγων

Συνάρτηση	Αντιπαράγωγος
$kf(x)$	$kF(x) + C$, οπου k σταθερά
$-f(x)$	$-F(x) + C$
$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

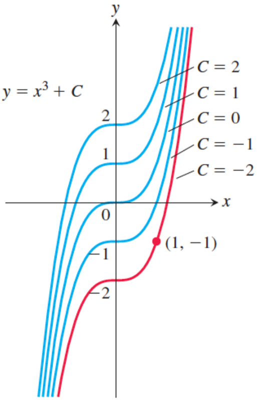
Παράδειγμα: Βρείτε την αντιπαράγωγο της $f(x) = 3\sqrt{x} + \sin 2x$

Αρχικές τιμές

Το C μπορεί να βρεθεί μόνο αν μας δίνεται και κάποια άλλη πληροφορία

Παράδειγμα

Να βρεθεί η αντιπαράγωγος της $f(x) = 3x^2$ που ικανοποιεί την συνθήκη $F(1) = -1$



Διαφορικές εξισώσεις

Η έρευση μιας αντιπαραγώγου για μια συνάρτηση $f(x)$ ισοδυναμεί με την εύρεση μια συνάρτησης $y(x)$ που ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται διαφορική εξίσωση και η συνάρτηση $y(x)$ που την ικανοποιεί είναι η αντιπαράγωγος της $f(x)$

Αν έχουμε και μια αρχική συνθήκη π.χ. για $x = x_0$ τότε $y(x_0) = y_0$, το πρόβλημα ονομάζεται πρόβλημα αρχικών συνθηκών.

Παραδείγματα

Να λυθεί το προβλήμα αρχικών τιμών

- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x,\ x > 0,\ y(2) = 1$
- $\frac{dy^2}{d^2x} = 0,\ \ y'(0) = 2,\ \ y(0) = 0$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Η συλλογή όλων των αντιπαραγώγων της f ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f ως προς x, και συμβολίζεται ως

$$\int f(x)dx$$

Το σύμβολο $\int$ είναι το σύμβολο της ολοκλήρωσης, η συνάρτηση f είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση και το x είναι η μεταβλητή ολοκήρωσης.

Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x ισούται με

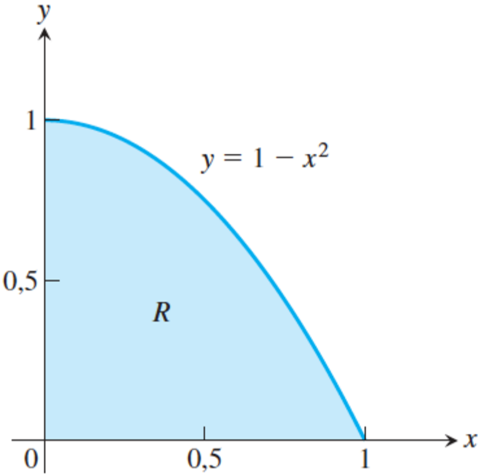
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Παραδείγματα

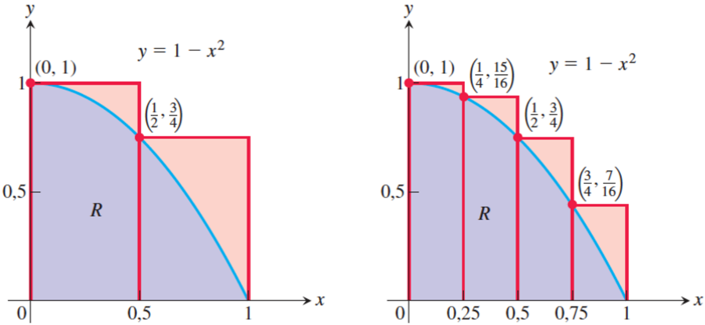
Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

- $\int x^n dx$
- $\int 1 dx$
- $\int \sin(kx) dx$
- $\int (x^2 - 2x + 5) dx$
- $\int (3t^2 + \frac{t}{2}) dt$

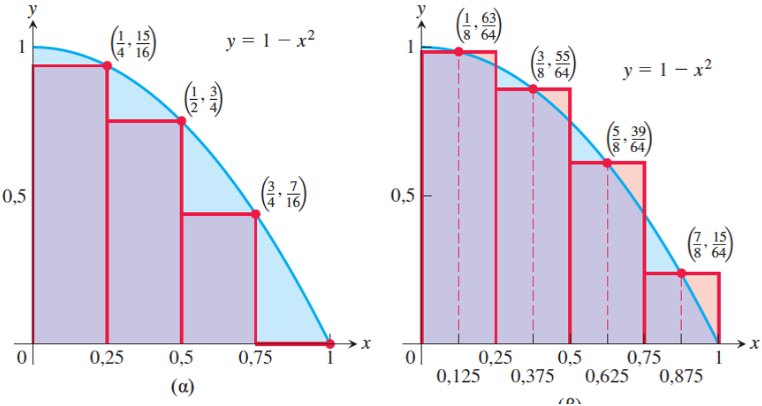
Εκτίμηση Εμβαδού



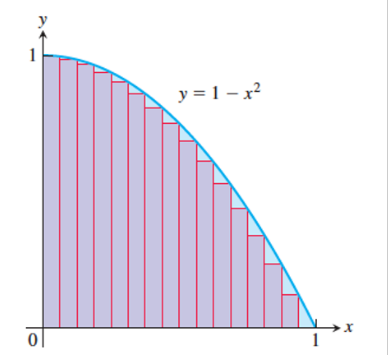
Εκτίμηση Εμβαδού

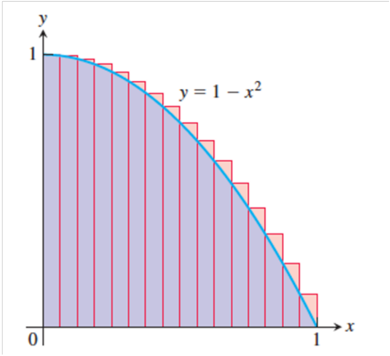


Εκτίμηση Εμβαδού



Εκτίμηση Εμβαδού





Εκτίμηση Εμβαδού

Number of subintervals	Lower sum	Midpoint rule	Upper sum
2	.375	.6875	.875
4	.53125	.671875	.78125
16	.634765625	.6669921875	.697265625
50	.6566	.6667	.6766
100	.66165	.666675	.67165
1000	.6661665	.66666675	.6671665

Πεπερασμένα αθροίσματα

Συμβολισμός σίγμα

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

όπου ο δείκτης κ αρχίζει από το 1 και τελειώνει στο $k = n$, και a_k είναι ο τύπος για το κ-οστό όρο.

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2$
- $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(1000) = \sum_{i=1}^{1000} f(i)$

Αλγεβρικοί κανόνες για πεπερασμένα αθροίσματα

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$	$\sum_{k=1}^{n}(a_k) + \sum_{k=1}^{n}(b_k)$
$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$	$\sum_{k=1}^{n}(a_k) - \sum_{k=1}^{n}(b_k)$
$\sum_{k=1}^{n}(ca_k)$	$c \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k)$
$\sum_{k=1}^{n} c$	$n \cdot c$

whiteboard

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

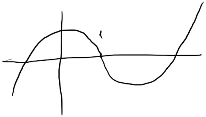
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

$f''(x) < 0$ για $x < 1$ κοίλα κάτω

$f''(x) = 0$ για $x = 1$ $\leftarrow$ σημείο καμπής

$f''(x) > 0$ για $x > 1$ κοίλα πάνω



$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ π.ο $f(x)$ $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ π.ο $f'(x)$ $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = 4(x^3 - 3x^2) = 4x^2(x-3)$

$f'(x) = 0$ αν $x = 0$ ή $x = 3$

	$x<0$	$0<x<3$	$x=3$	$3<x$
Διαπ				
προσ. $f'(x)$	$-$	$-$		$+$
Συμπ $f(x)$	↘	↘		↗

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ → $f''(x) = 0$ < $x=0$, $x=2$

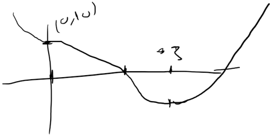
Δ	$x<0$	$0<x<2$	$2<x$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	πάνω	κάτω	πάνω

$x < 0$
φθινουσ.
ανω

$0 < x < 2$
φθ.
κατω

$2 < x < 3$
φθ,
ανω

$3 < x$
αυξ
ανω



$f(x) = x^3 - 12x - 5$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4)$

$= 3(x-2)(x+2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = -2$

$(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$

$f'(x)\big|_{x=-3} = 15$, $f'(x)\big|_{x=0} = -12$, $f'(x)\big|_{x=3} = 15$

Διαστ	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	15	−12	15
πρόσημο	+	−	+
Συν	αυξ. (↗)	φθιν (↘)	αυξ. (↗)

$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ ακρ.

$\boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (x^{\frac{3}{3}} - 4) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (x-4)$

συνεχ. πδl. συν. πδl.

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} - 4 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} (x^{\frac{3}{3}} - 1) =$

$= \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$

$f'(x) = 0 \to x = 1$

$\exists f'(x) \to \underbrace{x = 0}_{\text{κριτ. στ}}$

Για $x<0$ $\quad f'(x)\Big|_{x=-1} = -\frac{8}{3} < 0$

Για $0<x<1$ $\quad f'(x)\Big|_{x=0,5} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{0,52}} < 0$

Για $x>1$ $\quad f'(x)\Big|_{2} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}} > 0$

Διαστ	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
προσ $f'(x)$	$-$	$-$	$+$
μονοτ	$\searrow$	$x=0$ $\searrow$	$x=1$ $\nearrow$

$f(1) = -3$

Τοπ → ολικ ελ.

$f'(x) = x(x-1) \longrightarrow$ κρι σημ $f'(x)=0 \longrightarrow x(x-1)=0$

$x=0 \quad x=1$

$x<0: \quad f'(-1) = 3>0$

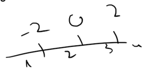
$0<x<1: \quad f'(0,5) = -\frac{1}{4}<0$

$x>1: \quad f'(2) = 2>0$

Δια	$-\infty<x<0$		$0<x<1$		$1<x\infty$
πρ. $f'(x)$	$+$		$-$		$+$
		$\nearrow$ μεγ.	$\searrow$	ελαχ	$\nearrow$
		Τοπικ.		Τοπικ	

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

κρισ. $x=2$, $x=-2$, $x=0$

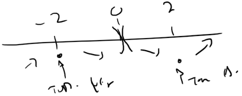


$x<-2$ $f'(x)$ $+$

$-2<x<0$ $f'(x)$ $-$

$0<x<2$ $f'(x)$ $-$

$x>2$ $f'(x)$ $+$



$$f(x) = 3\sqrt{x} + \sin 2x \qquad F(x)$$

$$f(x) = 3 \cdot g(x) + h(x) \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$h(x) = \sin 2x$$

$$F(x) = 3 \cdot G(x) + H(x)$$

$F'(x) = f(x)$

$$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to G(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_1$$

$$h(x) = \sin 2x \to H(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + C_2$$

$$F(x) = 3\left(\frac{2}{3} x^{3/2} + C_1\right) + \left(-\frac{\cos 2x}{2} + C_2\right) =$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{\cos 2x}{2} + C$$

$f(x) = 3x^2 \qquad F(x) \quad , \quad F(1) = -1$

$F(x) = x^3 + C \quad , \quad F(1) = -1 \Rightarrow$

$1 + C = -1 \Rightarrow C = -2$

$F(x) = x^3 - 2$