Διάλεξη 10: Ακρότατα συναρτήσεων

Ανακοινώσεις

Επόμενη εβδομάδα

Τρίτη 31/10: φροντιστήριο
Πέμπτη 2/11: διάλεξη
Παρασκευή 3/11 : φροντιστήριο

Ολικά ακρότατα

Έστω $f(x)$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού D. Η $f(x)$ αποκτά την απόλυτα μεγαλύτερη τιμή της (ολικό ή απόλυτο μέγιστο) στο σημείο c του Π.Ο, αν

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D$$

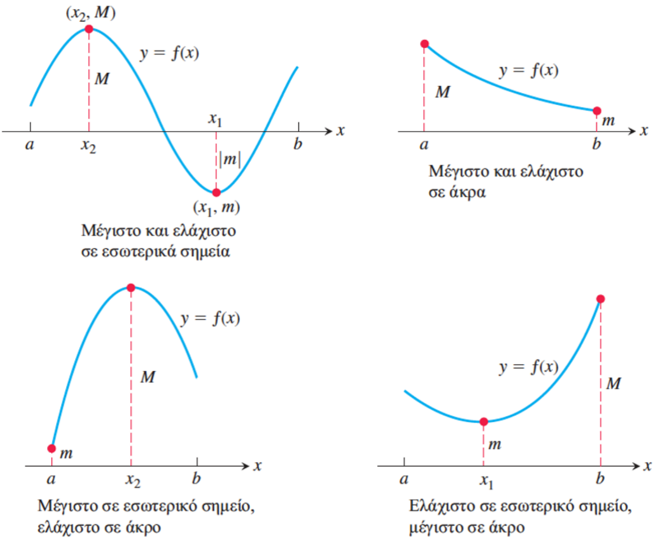
και την απόλυτα μικρότερη τιμή της (ολικό ή απόλυτο ελάχιστο) αν

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in D$$

Θεώρημα ακροτάτων

Αν η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\left[a, b\right]$, τότε έχει ολικό μέγιστο M και ολικό ελάχιστο m στο $\left[a, b\right]$.
Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 τέτοιοι ώστε
$f(x_1) = m,\ f(x_2) = M$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε άλλο
$x \in [a, b]$

Παράδειγμα

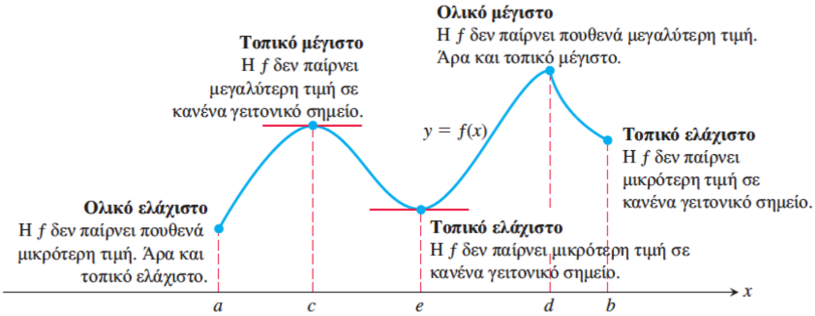


(x_2, M)
$y = f(x)$
M
x_1
a
x_2
b
x
$|m|$
(x_1, m)
Μέγιστο και ελάχιστο
σε εσωτερικά σημεία
$y = f(x)$
M
m
a
b
x
Μέγιστο και ελάχιστο
σε άκρα
$y = f(x)$
M
m
a
x_2
b
x
Μέγιστο σε εσωτερικό σημείο,
ελάχιστο σε άκρο
$y = f(x)$
M
m
a
x_1
b
x
Ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο,
μέγιστο σε άκρο

Τοπικά ακρότατα

- Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο c εντός του πεδίου ορισμού της D, αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε $x \in D$ που ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c.
- Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο c εντός του πεδίου ορισμού της D, αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε $x \in D$ που ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c.

Παράδειγμα



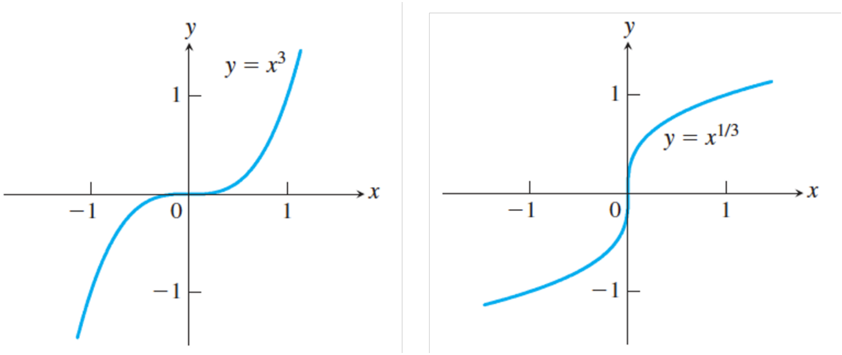
Ολικό μέγιστο
Η f δεν παίρνει πουθενά μεγαλύτερη τιμή.
Άρα και τοπικό μέγιστο.
Τοπικό μέγιστο
Η f δεν παίρνει
μεγαλύτερη τιμή σε
κανένα γειτονικό σημείο.
y = f(x)
Τοπικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει
μικρότερη τιμή σε
κανένα γειτονικό σημείο.
Ολικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει πουθενά
μικρότερη τιμή. Άρα και
τοπικό ελάχιστο.
Τοπικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει μικρότερη τιμή σε
κανένα γειτονικό σημείο.
x
a
c
e
d
b

Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του Π.Ο της και αν η $f'(x)$ ορίζεται στο c τότε $f'(c) = 0$

- ¨Ενα εσωτερικό σημείο του Π.Ο μιας συνάρτησης f όπου η $f'(x) = 0$ ή δεν ορίζεται λέγεται κρίσιμο σημείο της f

Παράδειγμα



Εύρεση ολικών ακροτάτων

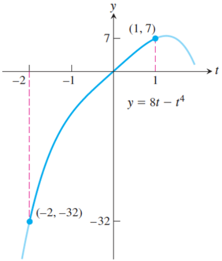
Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα μια συνεχούς συνάρτησης f σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα

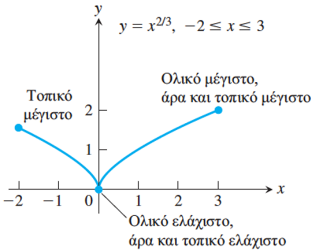
1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο διάστημα
2. Υπολογίζουμε τις τιμές στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα
3. Πέρνουμε την μέγιστη/ελάχιστη τιμή

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα των

- $f(x) = x^2$ στο $[-2, 1]$
- $g(t) = 8t - t^4$ στο $[-2, 1]$
- $f(x) = x^{2/3}$ στο $[-2, 3]$





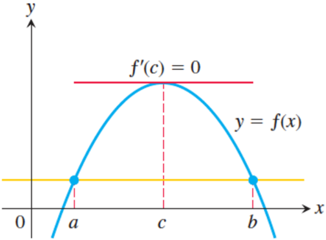
Παράδειγμα

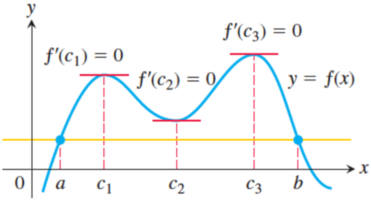
- Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$
- Να a, b, c, d ώστε η $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ να έχει τοπικό μέγιστο στο (0,0) και τοπικό ελάχιστο στο (1,-1).

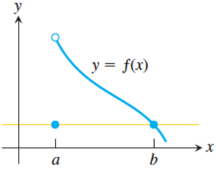
Θεώρημα του *Rolle*

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα αριθμός c στο (a, b) όπου $f'(c) = 0$

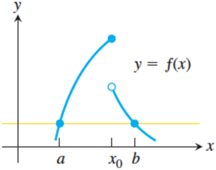
Θεώρημα του *Rolle*



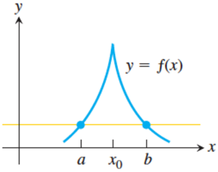




(α) Ασυνεχής σε άκρο του $[a, b]$



(β) Ασυνεχής σε εσωτερικό σημείο του $[a, b]$

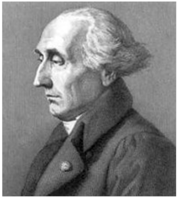


(γ) Συνεχής στο $[a, b]$ αλλά μη διαφορίσιμη σε εσωτερικό σημείο

Θεώρημα Μέση Τιμής

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b). Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο c στο (a, b) στο οποίο

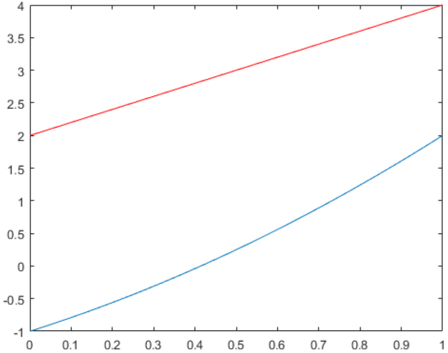
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Joseph-Louis Lagrange
1736 –1813

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα c που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ για $f(x) = x^2 + 2x - 1$ στο $[0, 1]$



Μονότονες συναρτήσεις

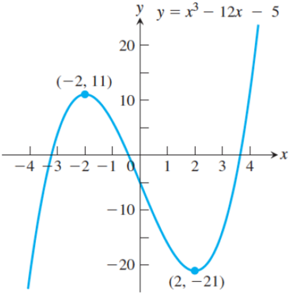
Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b)

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$

Μονότονες συναρτήσεις

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και τα ανοικτά διαστήματα που η $f(x)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Διάστημα	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Πρόσημο f'	+	–	+
Συμπεριφορά της f	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα

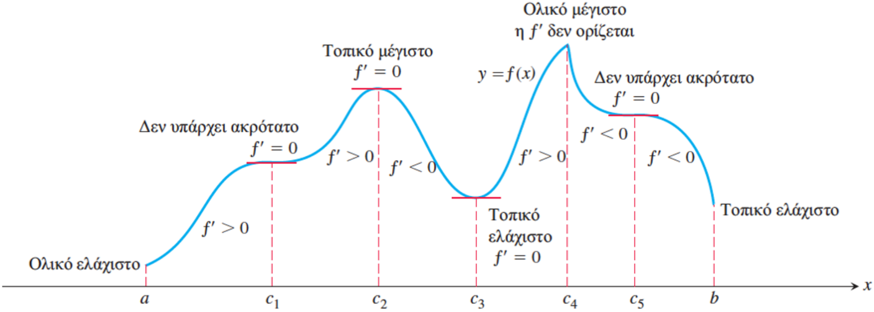


Κριτήριο 1ης παραγώγου

Έστω c κρίσιμο σημείο της συνεχούς συνάρτησης f, και η f ειναι διαφορίσιμη σε κάθε σημειο κάποιου διαστήματος που περιέχει το c (εκτός ενδεχομένως από το ίδιο το c). Διασχίζοντας το διάστημα από αριστερά προς τα δεξιά

- αν η f' μεταβάλλεται από αρνητική σε θετική στο c, τοτε η f εμφανίζει τοπικό **ελάχιστο** στο c
- αν η f' μεταβάλλεται από θετική σε αρνητική στο c, τοτε η f εμφανίζει τοπικό **μέγιστο** στο c
- αν η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο c, τότε η f **δεν** εμφανίζει τοπικό ακρότατο στο c

Κριτήριο 1ης παραγώγου



Παράδειγμα

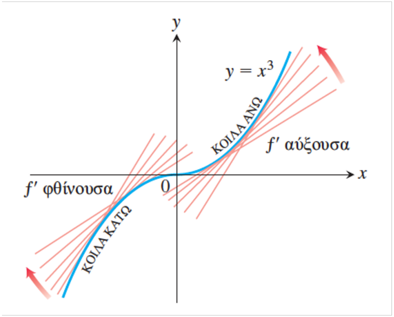
Να βρεθούν η μονοτονία, τα τοπικά και ολικά ακρότατα των

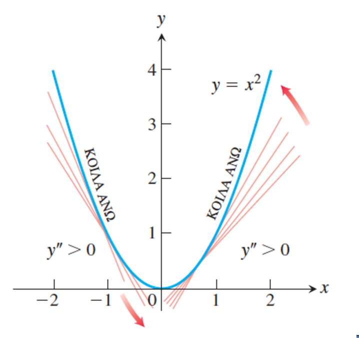
- $f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$
- f για την οποία $f'(x) = x(x-1)$
- f για την οποία $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

Κυρτότητα: κριτήριο 1ης παραγώγου

Η γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ στρέφει

- τα κοίλα άνω σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η $f'(x)$ είνα αύξουσα στο I.
- τα κοίλα κάτω σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η $f'(x)$ είνα φθίνουσα στο I.





Κυρτότητα: κριτήριο 2ης παραγώγου

Έστω $y = f(x)$ διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα

- Αν $f'' > 0$ στο I,η γραφική παράσταση της f στο I στρέφει τα κοίλα άνω.
- Αν $f'' < 0$ στο I,η γραφική παράσταση της f στο I στρέφει τα κοίλα κάτω.

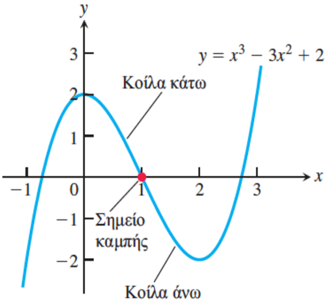
Σημείο καμπής

Ένα σημειο $(c, f(c))$ όπου η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει εφαπτομένη και αλλάζει κοιλότητα ονομάζεται σημείο καμπής

Σε ένα σημείο $(c, f(c))$ καμπής είτε $f''(c) = 0$ ή η $f''(c)$ δεν υπάρχει

Παράδειγμα

Προσδιορίστε την κοιλότητα και βρείτε τα σημεία καμπής
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



Κριτήριο 2ης παραγώγου

Έστω ότι η f'' είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $x = c$.

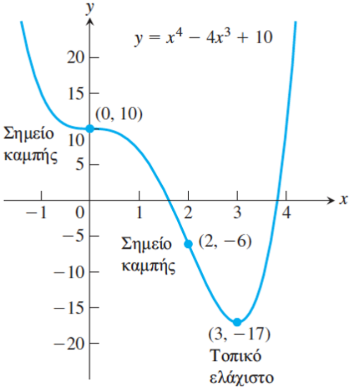
1. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$ τότε η εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$.
2. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$ τότε η εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$.
3. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) = 0$ τότε τότε δεν ξέρουμε. Μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο, ελάχιστο ή τίποτα από τα δύο.

Κατασκευή γραφίματος

1. Βρίσκουμε το πεδιο ορισμού και πιθανές συμμετρίες
2. Βρίσκουμε τις παραγώγους
3. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία
4. Βρίσκουμε μονοτονία ανα διαστήματα
5. Βρίσκουμε σημεία καμπής και προσδιορίζουμε την κοιλότητα
6. Βρίσκουμε ασύμπτωτες αν υπάρχουν
7. Σχεδιάζουμε την καμπύλη

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί μια πρόχειρη γραφική παράσταση της
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$



Αντιπαράγωγοι

Μια συνάρτηση F είναι αντιπαράγωγος της f σε ένα διάστημα I αν $F'(x) = f(x)$ για x καθε στο I.

Αν η F είναι μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η γενική μορφή της αντιπαραγώγου της f στο I ειναι η $F(x) + C$ όπου C μια αυθέρετη σταθερά.

Κανόνες για πράξεις αντιπαραγώγων

Συνάρτηση	Αντιπαράγωγος
$kf(x)$	$kF(x) + C$, οπου k σταθερά
$-f(x)$	$-F(x) + C$
$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

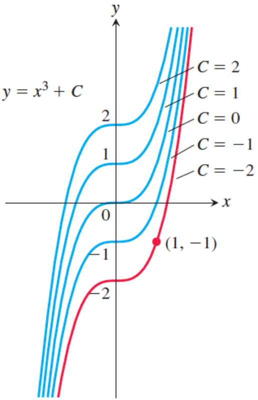
Παράδειγμα: Βρείτε την αντιπαράγωγο της $f(x) = 3\sqrt{x} + \sin 2x$

Αρχικές τιμές

Το C μπορεί να βρεθεί μόνο αν μας δίνεται και κάποια άλλη πληροφορία

Παράδειγμα

Να βρεθεί η αντιπαράγωγος της $f(x) = 3x^2$ που ικανοποιεί την συνθήκη $F(1) = -1$



Διαφορικές εξισώσεις

Η έρευση μιας αντιπαραγώγου για μια συνάρτηση $f(x)$ ισοδυναμεί με την εύρεση μια συνάρτησης $y(x)$ που ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται διαφορική εξίσωση και η συνάρτηση $y(x)$ που την ικανοποιεί είναι η αντιπαράγωγος της $f(x)$

Αν έχουμε και μια αρχική συνθήκη π.χ. για $x = x_0$ τότε $y(x_0) = y_0$, το πρόβλημα ονομάζεται πρόβλημα αρχικών συνθηκών.

Παραδείγματα

Να λυθεί το προβλήμα αρχικών τιμών

- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x,\ x > 0,\ y(2) = 1$

- $\frac{dy^2}{d^2x} = 0,\ y'(0) = 2,\ y(0) = 0$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Η συλλογή όλων των αντιπαραγώγων της f ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f ως προς x, και συμβολίζεται ως

$$\int f(x)dx$$

Το σύμβολο $\int$ είναι το σύμβολο της ολοκλήρωσης, η συνάρτηση f είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση και το x είναι η μεταβλητή ολοκήρωσης.

Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x ισούται με

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

whiteboard

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

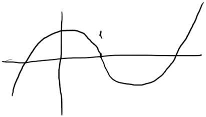
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

$f''(x) < 0$ για $x < 1$ κοίλα κάτω

$f''(x) = 0$ για $x = 1$ ← σημείο καμπής

$f''(x) > 0$ για $x > 1$ κοίλα πάνω



$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ π.ο $f(x)$ $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ π.ο $f'(x)$ $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = 4(x^3 - 3x^2) = 4x^2(x-3)$

$f'(x) = 0$ αν $x = 0$ ή $x = 3$

Διαστ.	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
πρόσ. $f'(x)$	$-$	$-$		$+$
Συμπ. $f(x)$	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$

$\rightarrow f'(x) = 0$ $x=0$, $x=2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

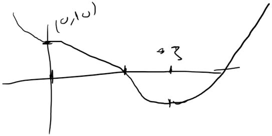
Δ	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	άνω	κάτω	άνω

$x < 0$ φθίνουσ. ανω

$0 < x < 2$ φθ. κατω

$2 < x < 3$ φθ, ανω

$3 < x$ αυξ ανω



$f(x) = x^3 - 12x - 5$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4)$

$= 3(x-2)(x+2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = -2$

$(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$

$f'(x)\big|_{x=-3} = 15$, $f'(x)\big|_{x=0} = -12$, $f'(x)\big|_{x=3} = 15$

Διαστ	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	15	-12	15
πρόσημο	+	−	+
Συνάρ	αυξ. ($\nearrow$)	φθίν ($\searrow$)	αυξ. ($\nearrow$)

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$$

ακρ.

$$\left[x^a \cdot x^b = x^{a+b} \right.$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x^{\frac{3}{3}} - 4\right) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (x-4)$$

συνεχ. παντ. συν. παντ.

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} - 4 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

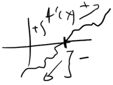
$$= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{3}{3}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

$f'(x) = 0 \to x = 1$

$\nexists f'(x) \to \underbrace{x = 0}_{\text{κρίσιμα}}$

Για $x<0$ $\quad f'(x)\Big|_{x=-1} = -\frac{8}{3} < 0$



Για $0<x<1$ $\quad f'(x)\Big|_{x=0,5} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{0,5^2}} < 0$

Για $x>1$ $\quad f'(x)\Big|_{2} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}} > 0$

Διαστ	$x<0$		$0<x<1$		$x>1$
πρόσ $f'(x)$	$-$		$-$		$+$
μονοτ	$\searrow$	$x=0$	$\searrow$	$x=1$	$\nearrow$

$f(1) = -3$ τοπ. ολικ. ελ.

$f'(x) = x(x-1)$ → κρι σημ $f'(x)=0 \to x(x-1)=0$

$x=0 \quad x=1$

$x<0: \quad f'(-1) = 3>0$

$0<x<1: \quad f'(0{,}5) = -\frac{1}{4}<0$

$x>1: \quad f'(2) = 2>0$

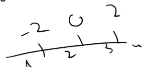
Διαστ	$-\infty<x<0$	$0<x<1$	$1<x<\infty$
πρ. $f'(x)$	$+$	$-$	$+$

↗ μεγ. ↘ ελαχ ↗

τοπικ. τοπικ

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

κρίσ. $x=2$, $x=-2$, $x=0$

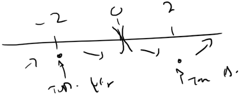


$x < -2$ $f'(x)$ $+$

$-2 < x < 0$ $f'(x)$ $-$

$0 < x < 2$ $f'(x)$ $-$

$x > 2$ $f'(x)$ $+$



$f(x) = 3\sqrt{x} + \sin 2x$ $\quad F(x)$

$f(x) = 3 \cdot g(x) + h(x)$, $g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = \sin 2x$

$F(x) = 3 \cdot G(x) + H(x)$

$F'(x) = f(x)$

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to G(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_1$

$h(x) = \sin 2x \to H(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + C_2$

$F(x) = 3\left(\frac{2}{3} x^{3/2} + C_1\right) + \left(-\dfrac{\cos 2x}{2} + C_2\right) =$

$= 2x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{\cos 2x}{2} + C$

$f(x) = 3x^2 \qquad F(x) \quad , \quad F(1) = -1$

$F(x) = x^3 + C \quad , \quad F(1) = -1 \Rightarrow$

$1 + C = -1 \Rightarrow C = -2$

$F(x) = x^3 - 2$