<u>Πιθανοτικά Μοντέλα</u>: Πιθανοτικό μοντέλο είναι η μαθηματική περιγραφή μιας αβέβαιης κατάστασης

<u>Δειγματικοί Χώροι και Γεγονότα</u> (Sample spaces και Events)

<u>Πείραμα Τύχης</u>: Μια διαδικασία που εκτελείται (πείραμα) ή παρατηρείται (φαινόμενο) και της οποίας το τελικό αποτέλεσμα είναι τυχαίο (όχι γνωστό εκ των προτέρων)

<u>Πχ</u> 1. Η ρίψη ενός ζαριού
2. Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης
3. Η τιμή του δείκτη μετοχών

• <u>Απλό γεγονός ή ενδεχόμενο</u>: Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης

• <u>Δειγματικός Χώρος</u> Ω (Sample Space): Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (δηλ. των απλών γεγονότων) ενός πειράματος τύχης.

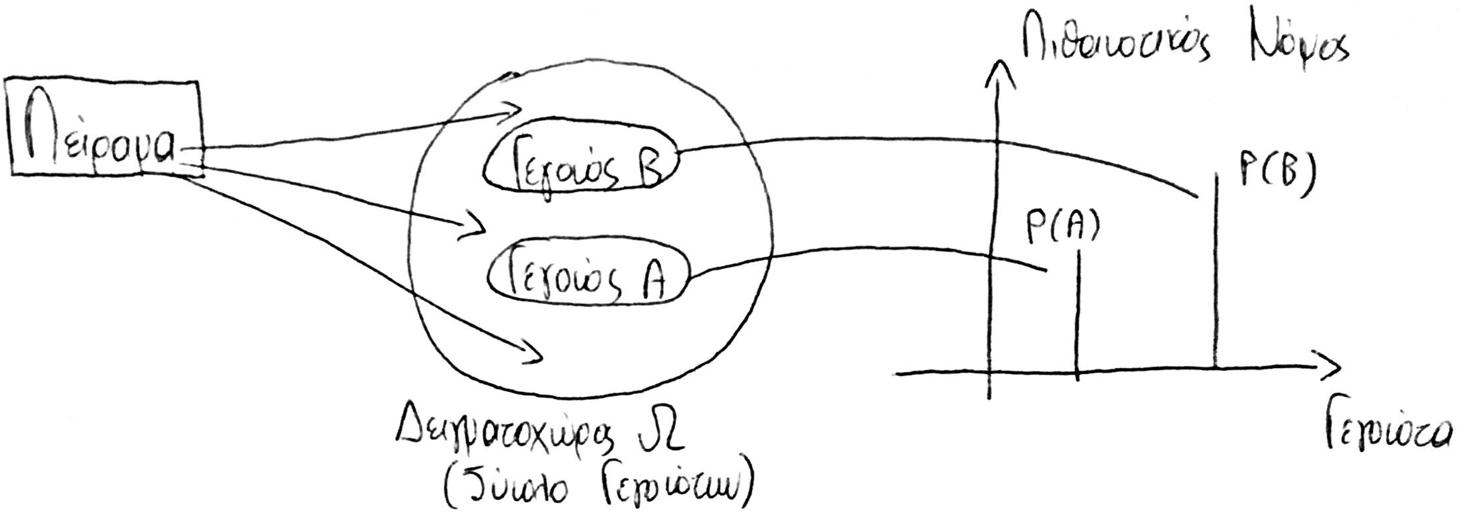
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \dots\} = \{\omega \mid \omega: \text{απλό γεγονός του πειράματος}\}$

↳ διαφέρει από πείραμα σε πείραμα

<u>Πχ</u>: Απλή ρίψη νομίσματος $\Omega = \{Κ, Γ\}$
Ρίψη 2 νομισμάτων $\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$ κ.ο.κ.

Πιθανοτικοί Νόμοι

Στοιχεία ενός πιθανοτικού Μοντέλου



Ο Πιθανοτικός Νόμος (Provability Low) εκχωρεί στο σύνολο A των πιθανών απλών γεγονότων ένα μη-αρνητικό αριθμό P(A) (πιθανότητα του A) που κωδικοποιεί την γνώση ή την πίστη μας σχετικά με την πιθανότητα εμφάνισης των στοιχείων του A

Ιδιότητες

1. $P(A) \geq 0$ για κάθε γεγονός A
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους γεγονότα
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(A^c) = 1 - P(A)$

Η τριάδα (Ω, F, P): χώρος πιθανότητας (probability space)

Ω: Δειγματοχώρος, F: σύνολο γεγονότων, P: νόμος

$P: F \to [0,1]$

Παράδειγμα: Ρίψεις νομίσματος

- Απλή Ρίψη — Δειγματοχώρος: $\Omega = \{K, \Gamma\}$

Γεγονότα: $\{K,\Gamma\}$, $\{K\}$, $\{\Gamma\}$

Για ένα δίκαιο νόμισμα μπορώ να θεωρήσω ότι:

$P(\{K\}) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$

Τότε $P(\{K,\Gamma\}) = P(\{K\}) + P(\{\Gamma\}) = 1 = P(\Omega)$

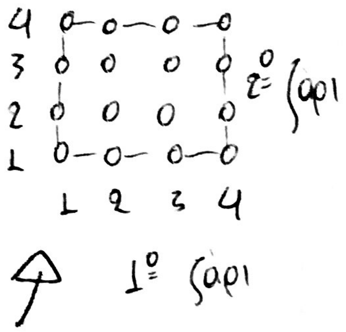
• <u>3 διαδοχικές ρίψεις</u>

$\Omega = \{\underset{1/8}{KKK}, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

Γεγονός $A = \{$ακριβώς 2 Κ έρχονται$\} = \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$

$P(A) = P(\{KK\Gamma\}) + P(\{K\Gamma K\}) + P(\{\Gamma KK\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

• <u>Ζεύγος ζαριών</u>



2 ζάρια τετράπλευρα

$\Omega = \{(i,j) / i,j = 1,2,3,4\}$ $\quad P((i,j)) = \frac{1}{16}$

$A = \{$τουλ. ένα ζάρι φέρει 4$\}$, $P(A) = \frac{7}{16}$

$B = \{1^o$ ζάρι $> 2^o$ ζάρι$\}$, $P(B) = \frac{3}{8}$

$\Gamma = \{$διπλές$\}$, $P(\Gamma) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

<u>Δεσμευμένη Πιθανότητα</u> (ή Πιθανότητα υπό Συνθήκη)

– Η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας μας επιτρέπει να αναλύουμε γεγονότα, βασισμένοι σε μερική πληροφορία (partial informatio

<u>Πχ</u> ① Στη ρίψη 2 ζαριών, πόσο πιθανό είναι το 1^o ζάρι να έχει φέρει 6 όταν το άθροισμα δύο ζαριών είναι 9?

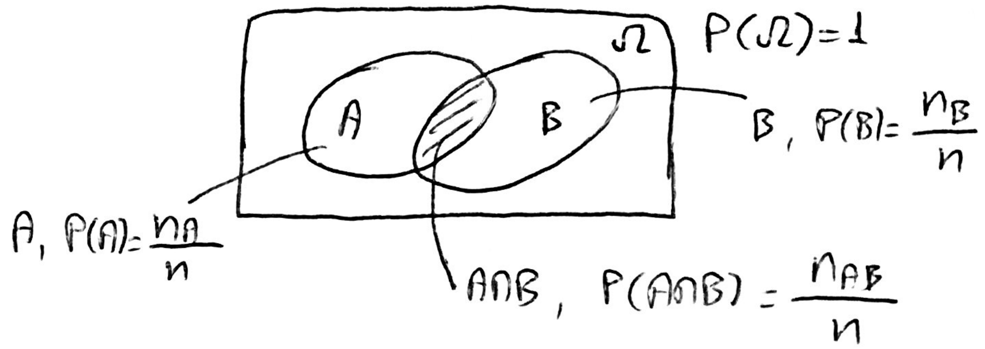
② Ποια η πιθανότητα να είναι ένα άτομο άρρωστο όταν το ιατρικό τεστ είναι αρνητικό?

Ορισμός: Έστω ένα πείραμα τύχης με χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P) και υποθέτουμε ότι ένα αποτέλεσμα βρίσκεται μέσα στο γεγονός B. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα το αποτέλεσμα να βρίσκεται επίσης σε ένα άλλο γεγονός A.

- Δηλαδή, θέλουμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση πιθανότητας, τη λεγόμενη <u>δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B, $P(A|B)$</u>

Ορισμός: Θεωρούμε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P) καθώς και 2 γεγονότα $A, B \in F$. Τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B ορίζεται ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Παράδειγμα 1: Ρίχνουμε ένα κέρμα 3 φορές. Ορίζουμε:

$A = \{$έρχονται περισσότερα Κ από Γ$\}$

$B = \{1^{\eta}$ ρίψη είναι Κ$\}$

Ποια η $P(A|B)$? $\left(P(A) = \frac{1}{2}\right)$

$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

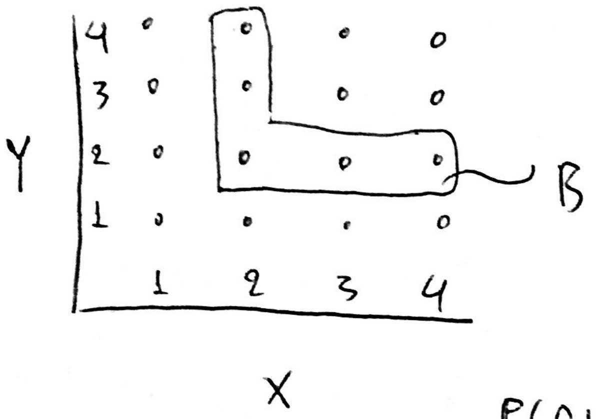
$B = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ\}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ\}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

Άρα, $P(A|B) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Ρίχνουμε 2 φορές ένα δίκαιο ζάρι 4 πλευρών

$A = \{\max(X,Y) = m\}$, $B = \{\min(X,Y) = 2\}$, $m = 1,2,3,4$. Ποια η $P(A|B)$?



$$B = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (4,2)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

$$P(A|B) = \begin{cases} 0, & m=1 \ (A = \{(1,1)\}) \\ 1/5, & m=2 \ (A = \{(2,1), (2,2), (1,2)\}) \\ 2/5, & m=3 \ (A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3)\}) \end{cases}$$

<u>Ολική Πιθανότητα και Κανόνας του Bayes</u>

<u>Θεώρημα</u> (Ολικής Πιθανότητας)

Έστω $A_1, \dots A_n$ ξένα γεγονότα που αποτελούν μια διαμέριση του Ω, το καθένα με θετική πιθανότητα: $P(A_i) > 0 \ \forall i = 1, \dots n$. Τότε για οποιοδήποτε γεγονός B ισχύει

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$$

Διαμερίζουμε κατάλληλα τον δειγματοχώρο, ανάλογα με τη δομή του προβλήματος, ώστε οι $P(B|A_i)$ να είναι εύκολο να βρεθούν. Τότε, η πιθανότητα ενός γεγονότος B δίνεται ως ο γραμμικός συνδυασμός των $P(B|A_i)$ με βάρη $P(A_i)$

Κανόνας του Bayes: (Η πως εξάγουμε συμπεράσματα από παρατηρήσεις!) ⑥

Αν $A_1, \ldots, A_n$ είναι μια διαμέριση του Ω με $P(A_i) > 0 \ \forall i$ τότε για κάθε γεγονός B με $P(B) > 0$, έχουμε ότι

$$\underbrace{P(A_i \mid B)}_{\text{"posterior probability"}} = \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\overbrace{P(B \mid A_i)}^{\text{"likelihood"}}}{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{P(A_k)}_{\text{"prior probability"}} P(B \mid A_k)}$$

Παράδειγμα: Όταν κάποιος παίρνει λεωφορείο για τη δουλειά του πηγαίνει καθυστερημένος στο 30% των περιπτώσεων και όταν παίρνει ταξί πηγαίνει καθυστερημένος στο 10% των περιπτώσεων. Προτιμά λεωφορείο στο 80% και ταξί στο 20% των περιπτώσεων.

(α) Ποια η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μια ημέρα;

(β) Αν μια ημέρα πήγε καθυστερημένος ποια η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο;

Λύση

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα

K: καθυστερημένος, Λ: παίρνει λεωφορείο, T: παίρνει ταξί

Η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μια μέρα είναι

$$P(K) = P(K \mid \Lambda) P(\Lambda) + P(K \mid T) P(T) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$$

Η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο δεδομένου ότι πήγε καθυστερημένος είναι:

$$P(\Lambda|K) = \frac{P(K|\Lambda)\,P(\Lambda)}{P(K)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}26} = 0{,}92$$

Ανεξαρτησία:

Ορισμένες φορές, η εμφάνιση ενός γεγονότος δεν επηρεάζει την πιθανότητα ενός άλλου. Τότε, λέμε ότι τα 2 γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ορισμός: Δυο γεγονότα $A, B \in \Omega$ λέγονται ανεξ. αν ισχύει ότι

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

Πχ Ρίχνω ένα 4-εδρο ζάρι 2 φορές

$\Omega = \{(i,j)$ όπου $i,j = 1,2,3,4\}$, $|\Omega| = 16$, $P(\{i,j\}) = \frac{1}{16}$.

(a) $A_i = \{1^{\eta}$ ρίψη είναι $i\}$, $B_j = \{2^{\eta}$ ρίψη είναι $j\}$

$$P(A_i \cap B_j) = P(\{i,j\}) = \frac{1}{16}$$

$$P(A_i) = \frac{\#\text{ σημείων στο } A_i}{\#\text{ όλων των δυνατών ενδεχομένων}} = \frac{4}{16}$$

$$P(B_j) = \frac{\#\ \ldots\text{ στο } B_j}{\#\ \ldots} = \frac{4}{16}$$

$$\left.\right\} \begin{array}{l} P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{16} = \\ = P(A_i)\,P(B_j) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_i, B_j \text{ ανεξ.} \end{array}$$

6) $A = \{\max(i,j) = 2\}$, $B = \{\min(i,j) = 2\}$

$$P(A \cap B) = P\{(2,2)\} = \frac{1}{16}$$

$$P(A) = \frac{|\{(2,1),(2,2),(1,2)\}|}{|\Omega|} = \frac{3}{16}$$

$$P(B) = \frac{|\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}|}{|\Omega|} = \frac{5}{16}$$

$P(A \cap B) = \frac{3}{16} \neq \frac{5}{16^2} = P(A)P(B) \rightsquigarrow A, B$ όχι ανεξάρτητα

<u>Υπό συνθήκη ανεξαρτησία</u>

<u>Ορισμός</u>: Δεδομένου του γεγονότος C, τα γεγονότα A και B είναι ανεξ. όταν

$$P(A \cap B | C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$$

<u>Παρατήρηση</u>: $P(A \cap B | C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$

Η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο δεδομένου ότι πήγε καθυστερημένος είναι: ⑦

$$P(\Lambda | K) = \frac{P(K|\Lambda)\,P(\Lambda)}{P(K)} = \frac{0,3 \cdot 0,8}{0,26} = 0,92$$

Ανεξαρτησία:

Ορισμένες φορές, η εμφάνιση ενός γεγονότος δεν επηρεάζει την πιθανότητα ενός άλλου. Τότε, λέμε ότι τα 2 γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ορισμός: Δύο γεγονότα $A, B \in \Omega$ λέγονται ανεξ. αν ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Πχ Ρίχνω ένα 4-εδρο ζάρι 2 φορές

$\Omega = \{ (i,j) \text{ όπου } i,j = 1,2,3,4 \}$, $|\Omega| = 16$, $P(\{i,j\}) = \frac{1}{16}$.

(a) $A_i = \{ 1^{\eta} \text{ ρίψη είναι } i \}$, $B_j = \{ 2^{\eta} \text{ ρίψη είναι } j \}$

$$P(A_i \cap B_j) = P(\{i, j\}) = \frac{1}{16}$$

$$P(A_i) = \frac{\#\text{ σημείων στο } A_i}{\#\text{ όλων των δυνατών ενδεχομένων}} = \frac{4}{16}$$

$$P(B_j) = \frac{\# \text{ - - - στο } B_j}{\# \text{ - - -}} = \frac{4}{16}$$

$P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{16} = P(A_i)\,P(B_j) \Rightarrow A_i, B_j$ ανεξ.