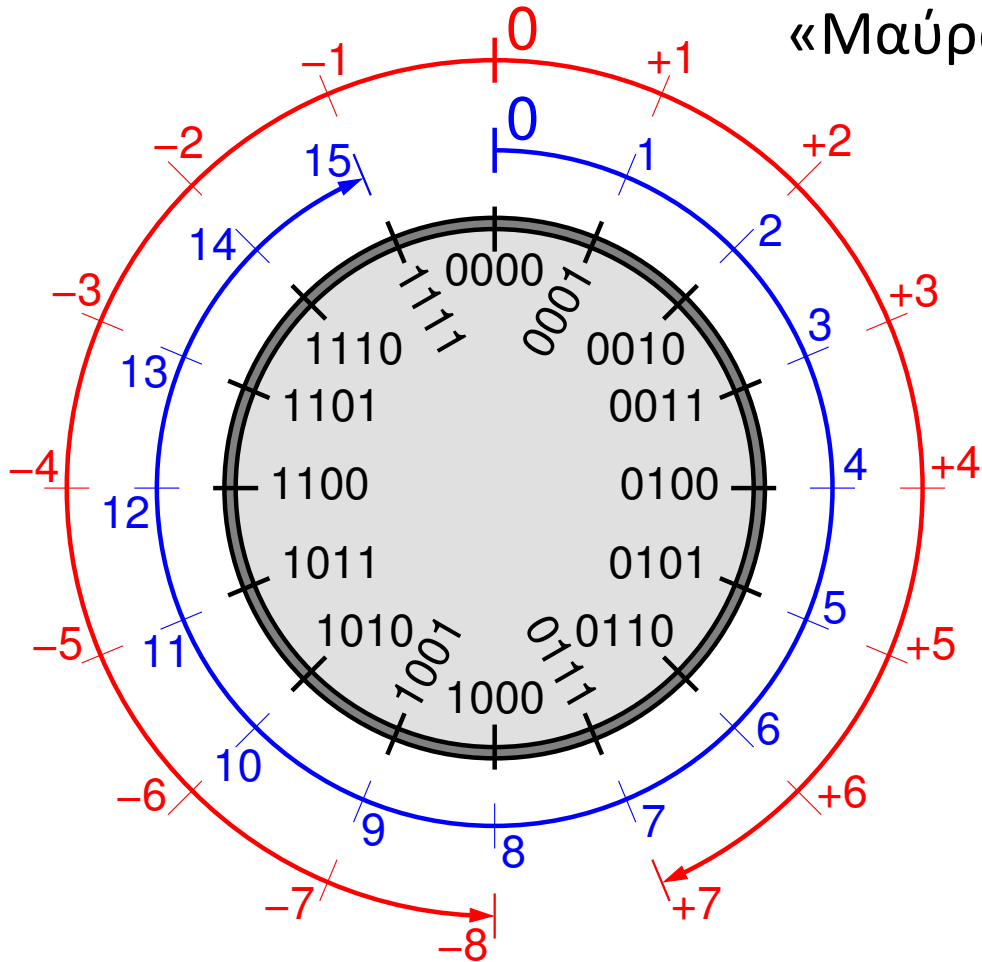


Προσημασμένοι Συμπληρώματος ως προς 2,
Πρόσθεσή Προσημασμένων,
Αντίθετος Αριθμού, Προσθαφαιρέτες

06b (§ 6.3 - 6.10) – 30 Οκτ. - 1 Νοε. 2023 – Μανόλης Κατεβαίνης

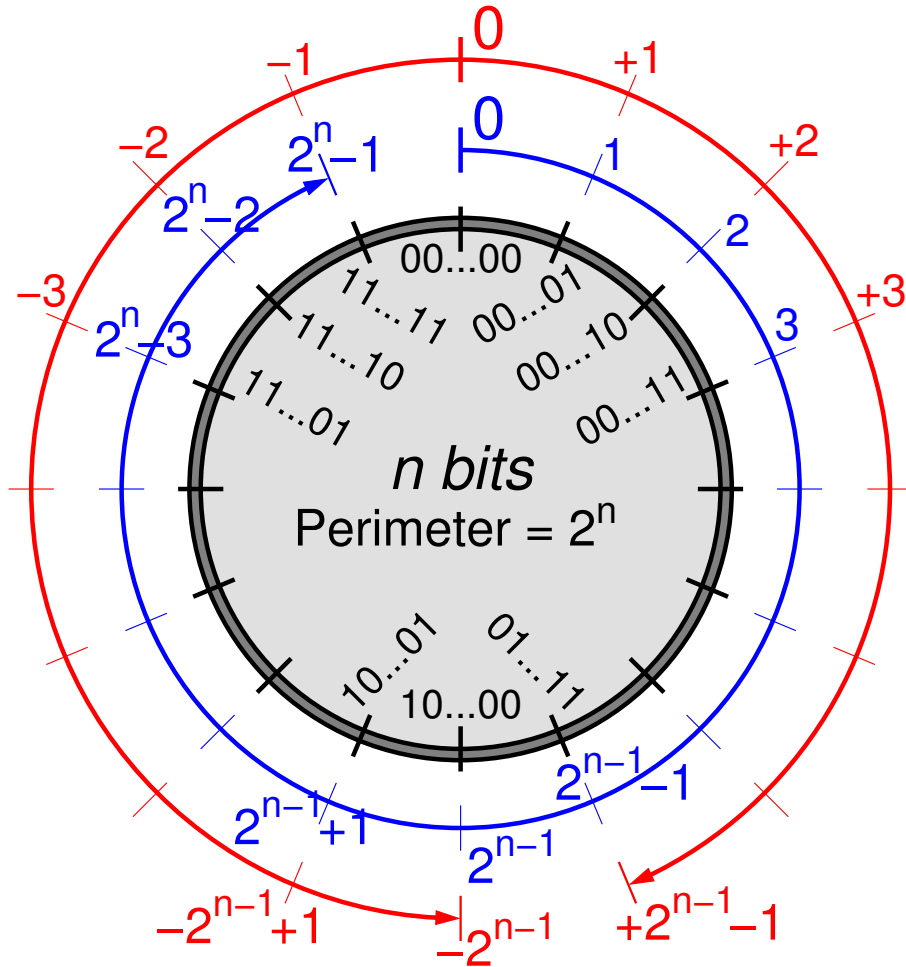
Προσημασμένοι Ακέραιοι σε Συμπλήρωμα ως προς 2



«Μαύρα» bits: ερμηνεία με δύο κώδικες:

- **Unsigned** (μη προσημασμένοι): θετικοί & μηδέν
- **Signed** (προσημασμένοι):
- Μισοί θετικοί & μηδέν
– MS bit == 0
- Μισοί αρνητικοί
– MS bit == 1
- Μικροί θετικοί: ίδιοι signed
- Μεγάλοι θετικοί: διαφέρουν

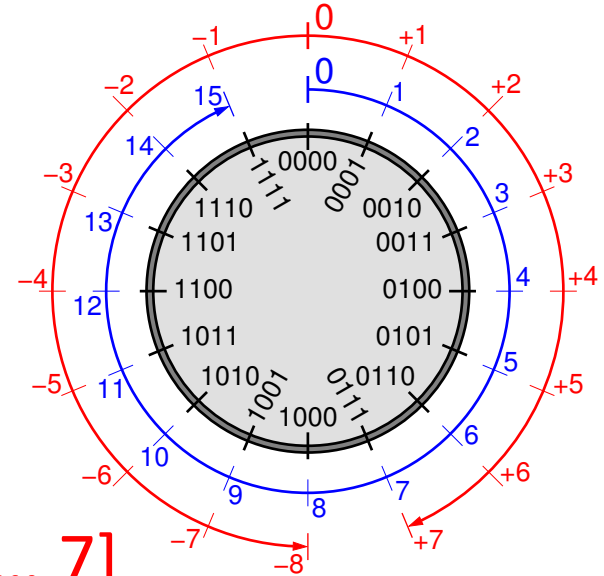
Ποιοί Προσημασμένοι Ακέραιοι παρίστανται με n bits



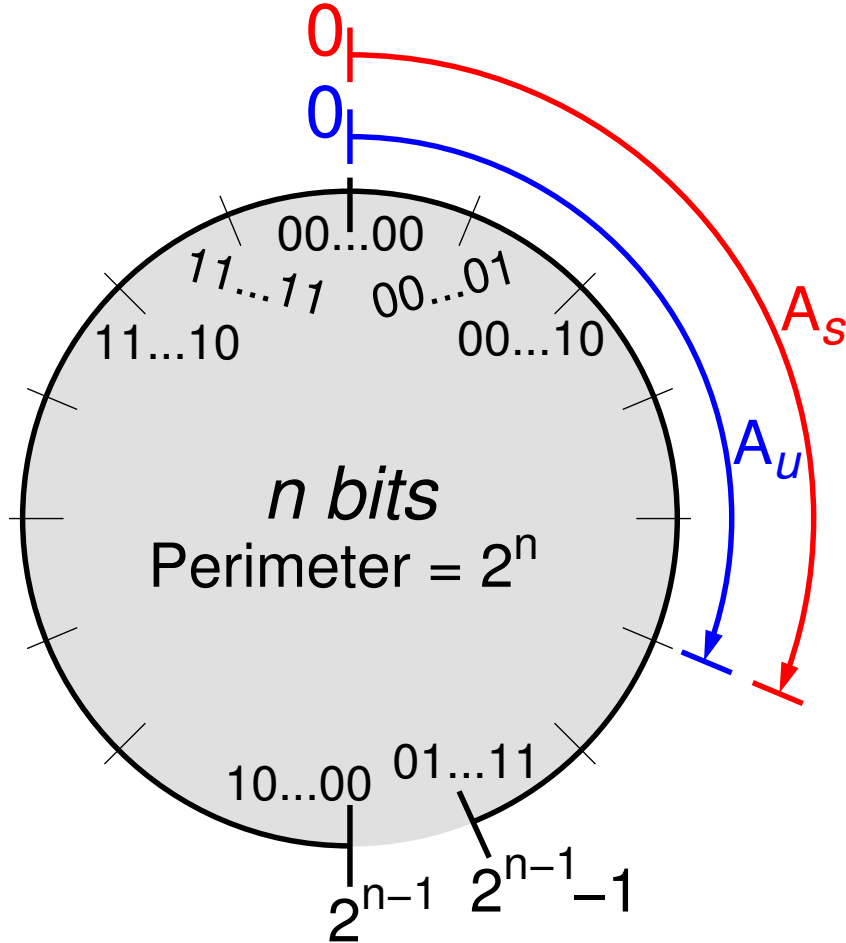
- n bits $\rightarrow 2^n$ το πλήθος ακερ.
- $0 \leq \text{unsigned} \leq 2^n-1$
- $-2^{n-1} \leq \text{signed} \leq +2^{n-1}-1$
- Αρνητικοί: μισοί απ' όλους = μισοί από τους $2^n \Rightarrow 2^{n-1}$
- Θετικοί & μηδέν: οι άλλοι μισοί από $2^n \Rightarrow 2^{n-1} \Rightarrow$ από το 0 έως και το $2^{n-1}-1$

Πόσα bits χρειάζονται για δοθέντα αριθμό;

- Ο *unsigned* 12 πόσα bits χρειάζεται;
- 4 bits $\Rightarrow 2^4=16$ αριθμοί: $[0, \dots 15]$
- Ο *unsigned* 12 $\in [0, \dots 15]$ και γράφεται: 1100
- Ο *signed* 12 πόσα bits χρειάζεται;
- 4 bits $\Rightarrow 2^4=16$ αριθμοί: $[-8, \dots -1, 0, 1, \dots 7]$
- 5 bits $\Rightarrow 2^5=32$ αριθμοί: $[-16, \dots -1, 0, 1, \dots +15]$
- Ο *signed* 12 $\in [-16, \dots +15]$ και γράφεται: 01100
- Ο *signed* 1100 ποιός είναι; MSbit==1 άρα αρνητικός: -4

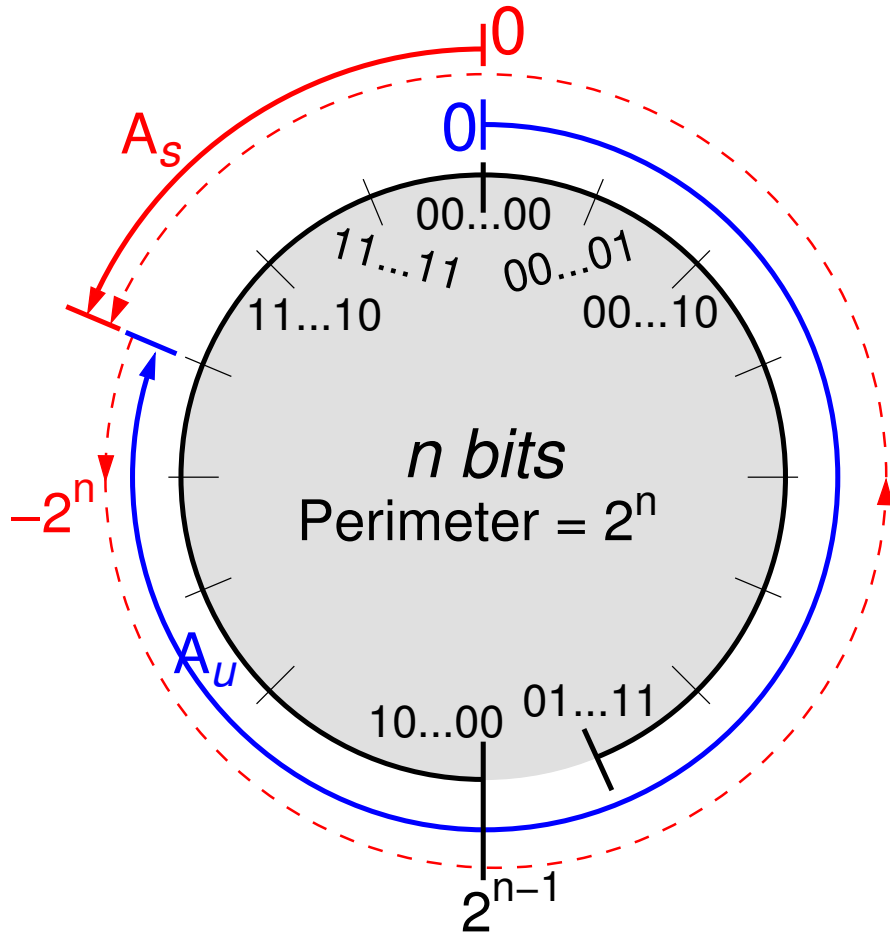


Μετατροπή *Unsigned* ↔ *Signed* για Θετικούς



- Δοθέντων n bits που ερμηνεύονται ως ο *unsigned* A_u με MS bit == 0, δηλ.: $0 \leq A_u \leq 2^{n-1}-1$
- Τότε αυτά ερμηνεύονται ως ο *signed* A_s όπου: $A_s = A_u$
- Αντιστρόφως, δοθέντος επιθυμητού *signed* $A_s \geq 0$, αυτός αναπαρίσταται όπως ο *unsigned* A_u με n bits όπου $A_u = A_s$ και n τέτοιο ώστε: $A_s \leq 2^{n-1}-1$

Μετατροπή *Unsigned* ↔ *Signed* για Αρνητικούς



- Δοθέντων n bits που ερμηνεύονται ως ο *unsigned* A_u με MS bit == 1, δηλ: $2^{n-1} \leq A_u \leq 2^n - 1$
- Τότε αυτά ερμηνεύονται ως ο *signed* A_s όπου: $A_s = A_u - 2^n < 0$
- Αντιστρόφως, δοθέντος επιθυμητού *signed* $A_s < 0$, αυτός αναπαρίσταται όπως ο *unsigned* A_u με n bits όπου: $A_u = A_s + 2^n$ και n τέτοιο ώστε: $-2^{n-1} \leq A_s$

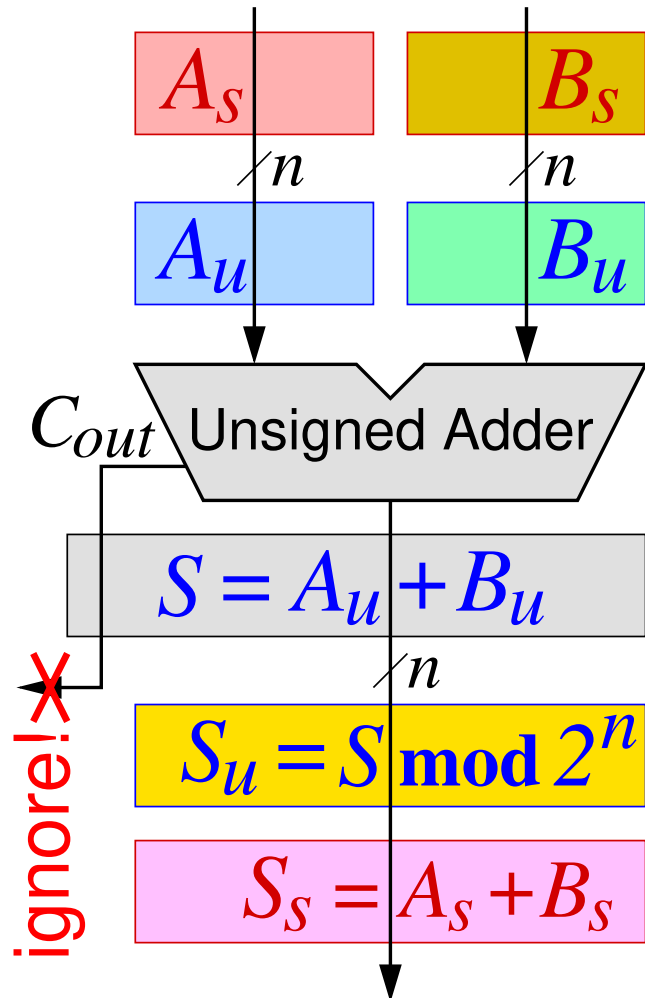
Εναλλακτικός Ορισμός Signed 2's Complement

- $B_u = +b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- $B_s = -b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- Μόνον το MS bit με αρνητικό συντελεστή σημαντικότητας – όλα τα υπόλοιπα θετικά – αντίθετα με τη συνήθη παράστ. αρνητ.
- $B_s \geq 0 \Leftrightarrow b_{n-1} = 0 \Rightarrow B_s = B_u \rightarrow$ άρα ίδιο όπως πριν
- $B_s < 0 \Leftrightarrow b_{n-1} = 1 \Rightarrow$
$$B_s = -2^{n-1} + (b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) =$$
$$= -2^n + 2^{n-1} + (b_{n-2} \times 2^{n-2} + b_{n-3} \times 2^{n-3} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) =$$
$$= -2^n + B_u \rightarrow$$
 άρα ίδιο όπως πριν

Παραδείγματα

- Να γραφτεί σε 2's complement ο **signed -40**
 - Χρειάζεται 7 bits: $2^7=128$ οι αριθμοί από -64 έως και +63
 - $A_s = -40$ αρνητικός, άρα ίδιος με $A_u = A_s + 2^7 = -40 + 128$
 $\Rightarrow A_u = 128-40 = 88 = 64 + 24 = 64+16+8 \rightarrow$ **1011000**
 - Επαλήθευση (2^η μέθοδος): $1011000 = -2^6+2^4+2^3 = -64+16+8 = -40$
- Ο **προσημασμένος 11010** ποιος είναι στο δεκαδικό;
 - Αρχίζει με 1, άρα αρνητικός. Έχει 5 bits άρα «κύκλος» $\Pi = 32$
 - $A_u = 11010 = 2^4+2^3+2^1 = 16+8+2 = 26$
 - Επειδή αρνητικός, 5 bits: $A_s = A_u - 32 = 26-32 = -6$
 - Επαλήθευση (2^η μέθ.): $-6 = -16+10 = -16+8+2 = -2^4+2^3+2^1 = 11010$

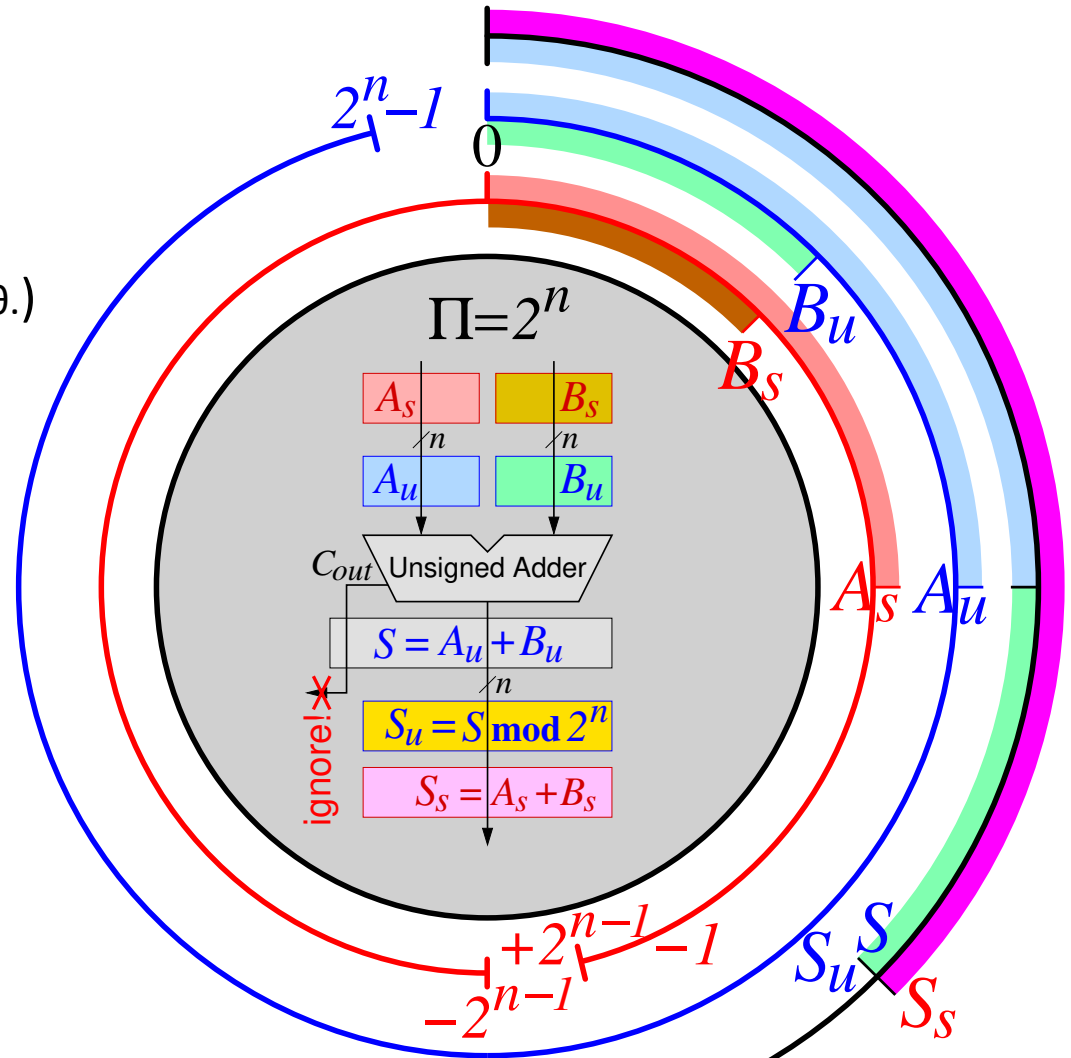
Πρόσθεση Προσημασμένων Συμπληρώματος του 2



- Με τον ίδιο απaráλλακτο αθροιστή απρόσημων!
- Πρέπει το Carry-out να αγνοηθεί
- Εάν το αλγεβρικό άθροισμα των προσημασμένων χωρά σε n bits, τότε αυτό θα είναι πάντα σωστό
- Εάν δεν χωρά, τότε η έξοδος (n bits) είναι σίγουρα λάθος
- Απόδειξη: 4 περιπτώσεις

1. Ομόσημοι Θετικοί

- Έστω A, B οι απόλυτες τιμές τους
- Χωρίς απώλεια γενικότητας, υποθέτουμε $A \geq B$ (αλλιώς αντιμεταθ.)
- Περίπτωση 1: $A_s = +A, B_s = +B$
- Θετικοί $\Rightarrow A_u = A_s = +A, B_u = B_s = +B$
- Υπόθεση μη υπερχείλισης, δηλ. άθροισμα χωρά σε n bits $\Rightarrow 0 \leq A_s + B_s = A + B \leq 2^{n-1} - 1$
- $S = A_u + B_u = A + B \leq 2^{n-1} - 1 < 2^n$
 $\Rightarrow S_u = S \bmod 2^n = S$
 $\Rightarrow S_u = S = A + B \leq 2^{n-1} - 1$
 $\Rightarrow S_s$ θετικό $\Rightarrow S_s = S_u = A + B$
 $\Rightarrow S_s = A + B = A_s + B_s$ — ΟΕΔ



2. Ετερόσημοι, Αθρ. Αρνητ.

- Περίπτωση 2:

$$A_s = -A, B_s = +B, \text{ όπου } A > B$$

- $A_u = A_s + 2^n = 2^n - A$

$$B_u = B_s = +B$$

- $A_u + B_u = 2^n - A + B = 2^n - (A - B)$

$$\text{και } A > B \Rightarrow S = A_u + B_u < 2^n$$

$$\Rightarrow S_u = S \bmod 2^n = S$$

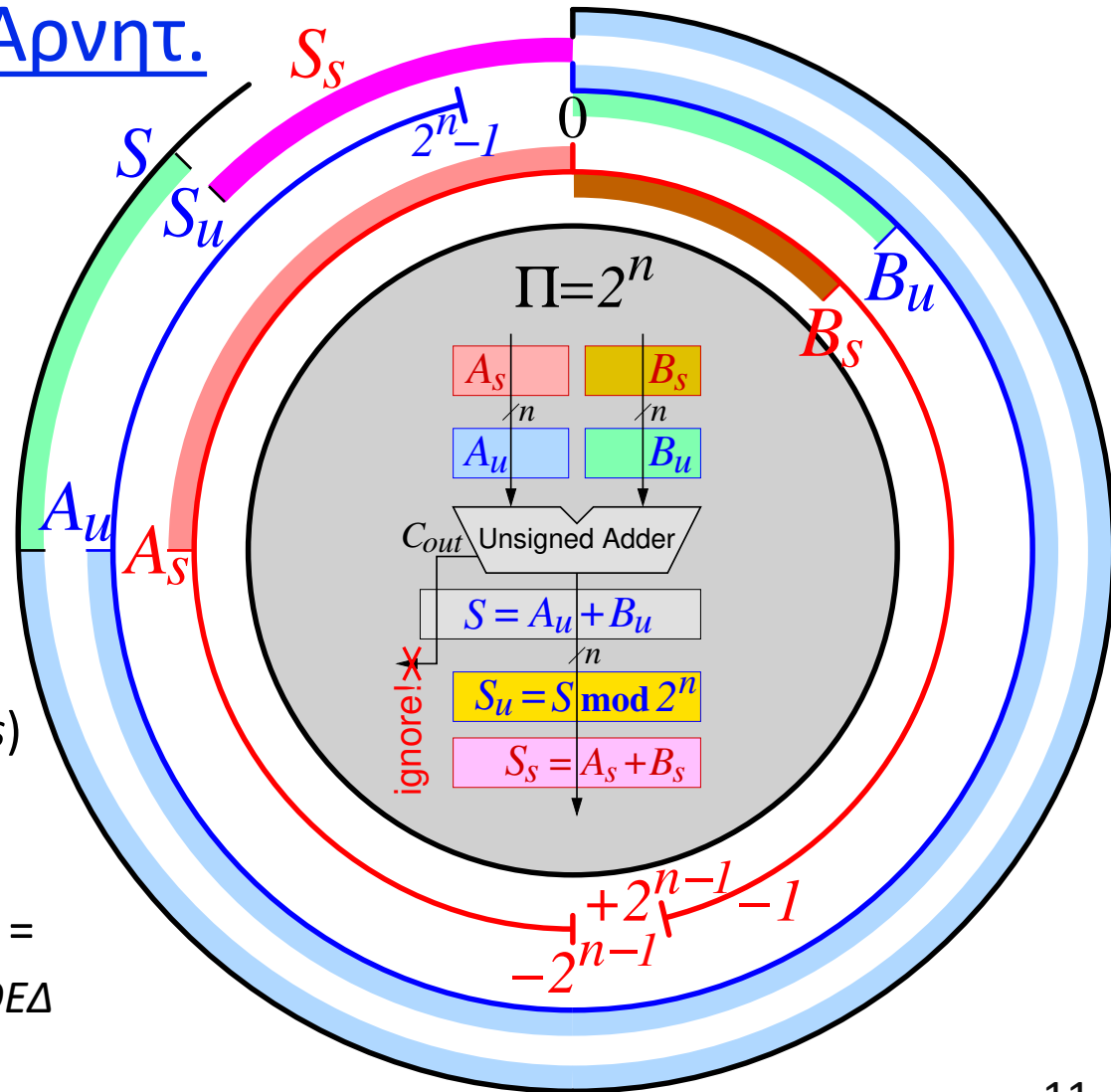
$$\Rightarrow S_u = S = 2^n - A + B$$

- $A_s = -A \Rightarrow A \leq 2^{n-1}$ (χωρά σε n bits)

$$\Rightarrow S_u = 2^n - A + B \geq 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow S_s \text{ αρνητικό}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_s &= S_u - 2^n = (2^n - A + B) - 2^n = \\ &= (-A) + (+B) = A_s + B_s \quad - \text{ΟΕΔ} \end{aligned}$$



3. Ετερόσημοι, Αθρ. Θετικό

- Περίπτωση 3:

$$A_s = +A, B_s = -B, \text{ όπου } A \geq B$$

- $A_u = A_s = +A$

$$B_u = B_s + 2^n = 2^n - B$$

- $A_u + B_u = A + 2^n - B = 2^n + (A - B)$

$$\text{και } A \geq B \Rightarrow S = A_u + B_u \geq 2^n$$

$$\Rightarrow S_u = S \bmod 2^n = S - 2^n$$

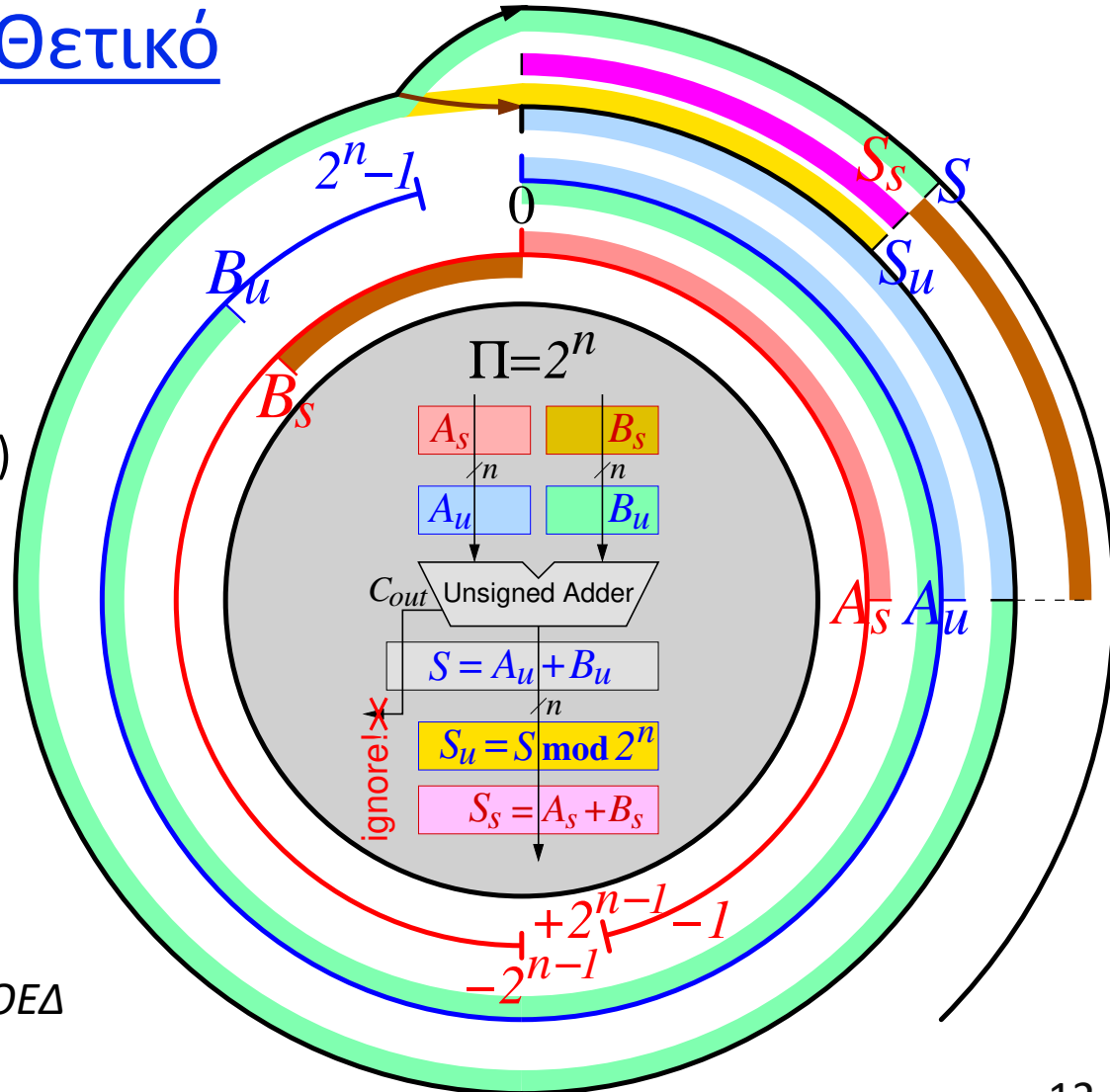
$$\Rightarrow S_u = S - 2^n = A_u + B_u - 2^n = (2^n + (A - B)) - 2^n = A - B$$

- $A_s = +A \Rightarrow A \leq 2^{n-1} - 1$ (n bits)

$$\Rightarrow S_u = A - B \leq 2^{n-1} - 1$$

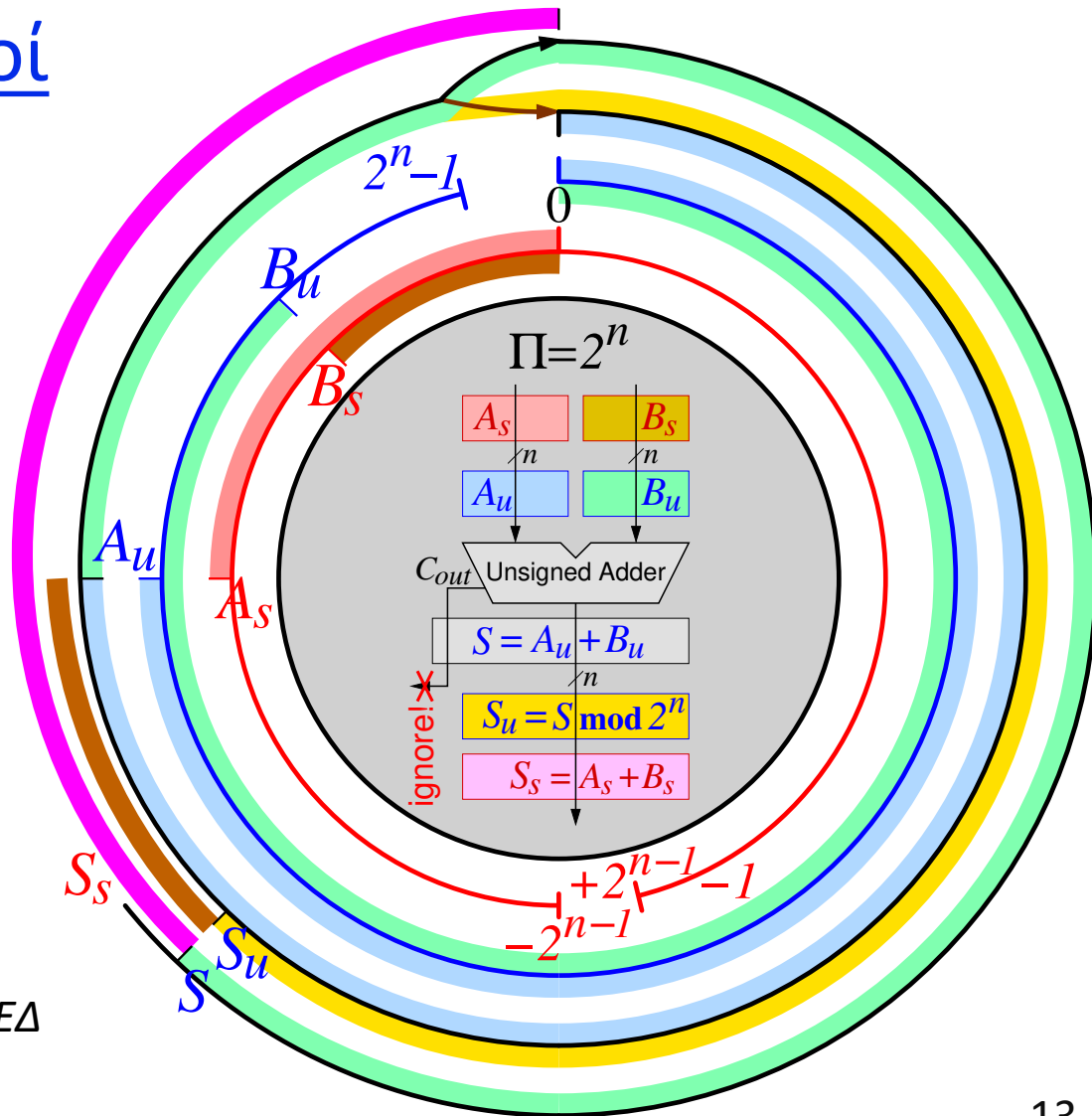
$$\Rightarrow S_s \text{ θετικό} \Rightarrow S_s = S_u = A - B =$$

$$= (+A) + (-B) = A_s + B_s \quad - \text{ΟΕΔ}$$



4. Ομόσημοι Αρνητικοί

- Περίπτωση 4: $A_s = -A$, $B_s = -B$, και $-A-B \geq -2^{n-1}$ (χωρά σε n bits)
- $A_u = A_s + 2^n = 2^n - A$
 $B_u = B_s + 2^n = 2^n - B$
- $S = A_u + B_u = 2^{n+1} - A - B$
και $-2^{n-1} \leq -A-B < 0$ (n bits)
 $\Rightarrow 1.5 \times 2^n \leq S < 2^{n+1}$
 $\Rightarrow S_u = S \bmod 2^n = S - 2^n = 2^{n+1} - A - B - 2^n = 2^n - A - B$
- $-A-B \geq -2^{n-1}$ (χωρά σε n bits)
 $\Rightarrow S_u = 2^n - A - B \geq 2^{n-1}$
 $\Rightarrow S_s$ αρνητικό $\Rightarrow S_s = S_u - 2^n = (-A) + (-B) = A_s + B_s$ - ΟΕΔ



Παραδείγματα

- $(-40) + (+8) = (-32)$
 - 7 bits, από διαφάνεια 8
 - $(-40) = 1011000$
 - $(+8) = 0001000$
 - $1100000 = -2^6 + 2^5 = -64 + 32 = -32$

$$\begin{array}{r} 1011000 \\ 0001000 \quad + \\ \hline \text{(~~C}_{out}=0~~) } 1100000 \end{array}$$

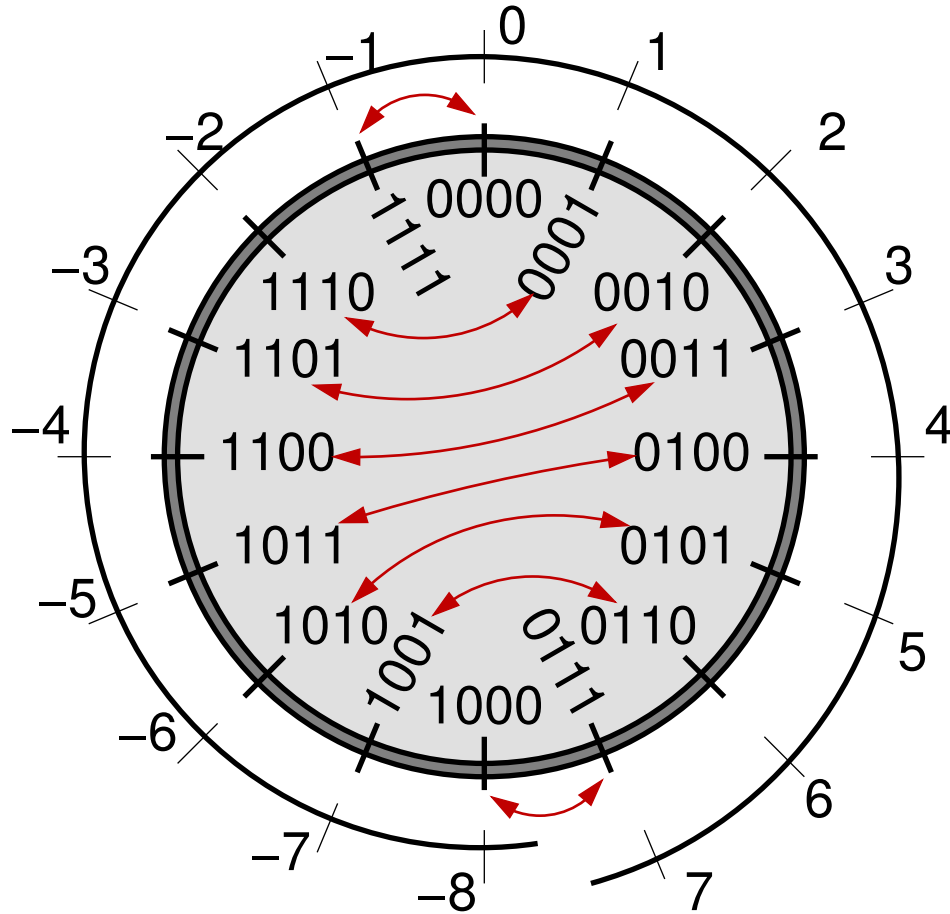
- $(-40) + (+47) = (+7)$
 - $(+47) = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 0101111$

$$\begin{array}{r} 1011000 \\ 0101111 \quad + \\ \hline \text{(~~C}_{out}=1~~) } 0000111 \end{array}$$

- $(-40) + (-13) = (-53)$
 - $B_s = (-13) = 115 - 128 = B_u - 2^7$
 - $B_u = 115 = 64 + 32 + 16 + 2 + 1 = 1110011$
 - $1001011 = -2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = -64 + 11 = -53$

$$\begin{array}{r} 1011000 \\ 1110011 \quad + \\ \hline \text{(~~C}_{out}=1~~) } 1001011 \end{array}$$

Συμπλήρωμα ως προς 1 (bitwise NOT) & ιδιότητες

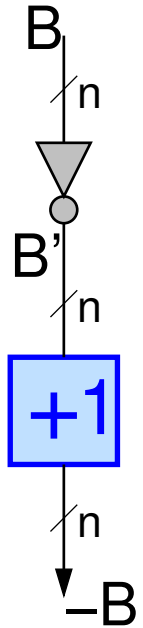
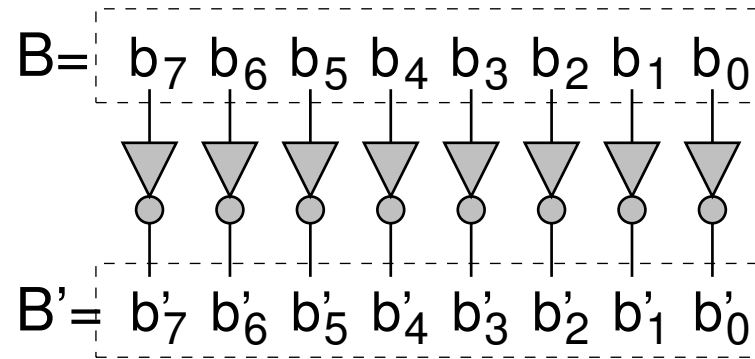


$$\begin{array}{r} B = 00101101 \\ B' = 11010010 \\ \hline B+B' = 11111111 = \text{"-1"} \end{array}$$

- «Συμπλήρωμα ως προς 1» (1's complement) = τα ΟΧΙ των bits, καθένα
- Αθροιζόμενο με τον αρχικό αριθμό δίνει πάντα -1

Αντίθετος Αριθμού = Bitwise NOT συν 1

$$\begin{array}{r} B = 00101101 \\ B' = 11010010 \\ \hline B+B' = 11111111 = "-1" \end{array}$$



- $B + B' = -1 \Rightarrow (B + B') + 1 = 0$

$$\Rightarrow B + (B' + 1) = 0$$

– όταν $(B' + 1)$ δεν προκαλεί υπερχείλιση (βλ. επόμενη διαφ.)

$$\Rightarrow \text{Ο αντίθετος του } B \text{ είναι ο: } -B = B' + 1$$

Παραδείγματα

• Γράψτε τον (-40) σαν signed 2's compl.

• 7 bits, από διαφάνεια 8

• (+40) = 32+8 = 0101000

• bitwise NOT: 1010111

⇒ Αντίθετος $-(+40) = -40 = 1011000$ (ίδιο με πριν)

1010111
1⁺

~~(C_{out} = 0)~~ 1011000

Αντίθετος του

(-7) = 1001

NOT = 0110

0110

1⁺

0111 = +7

Αντίθετος του

(+7) = 0111

NOT = 1000

1000

1⁺

1001 = -7

Αντίθετος του -8 δεν υπάρχει

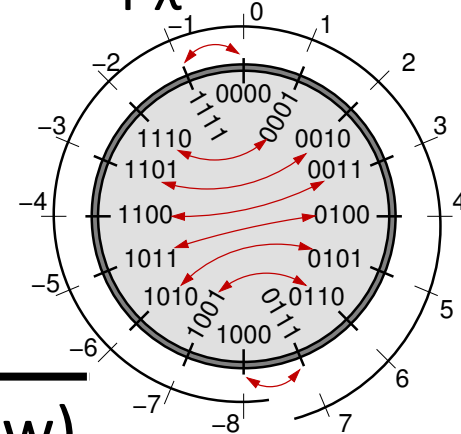
(-8) = 1000

NOT = 0111

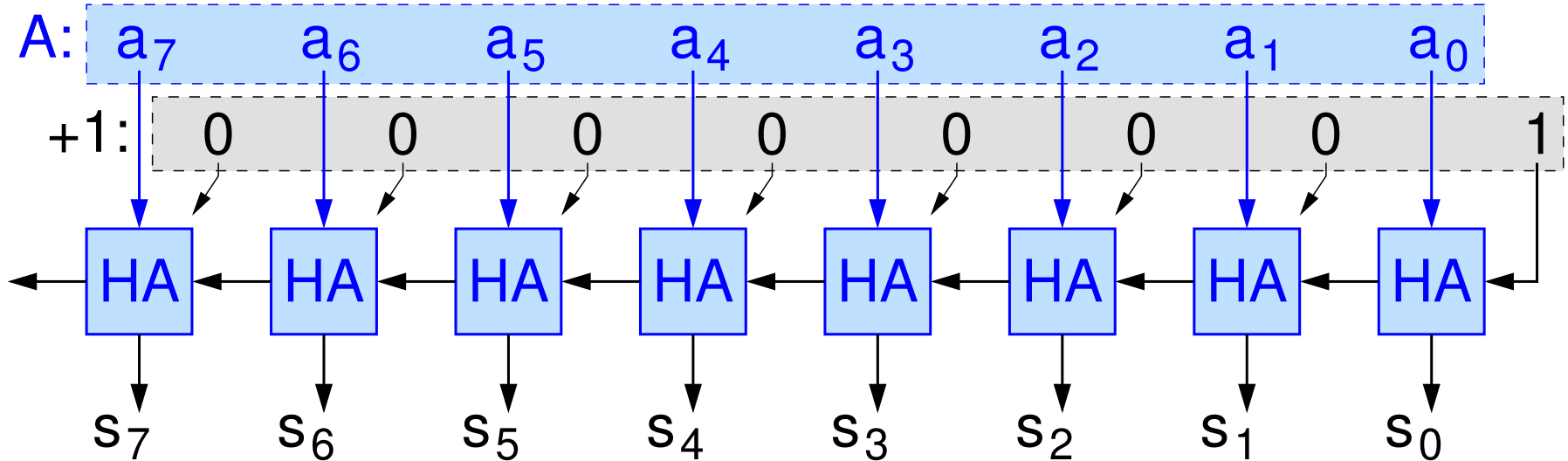
0111

1⁺

1000 = -8 (overflow)

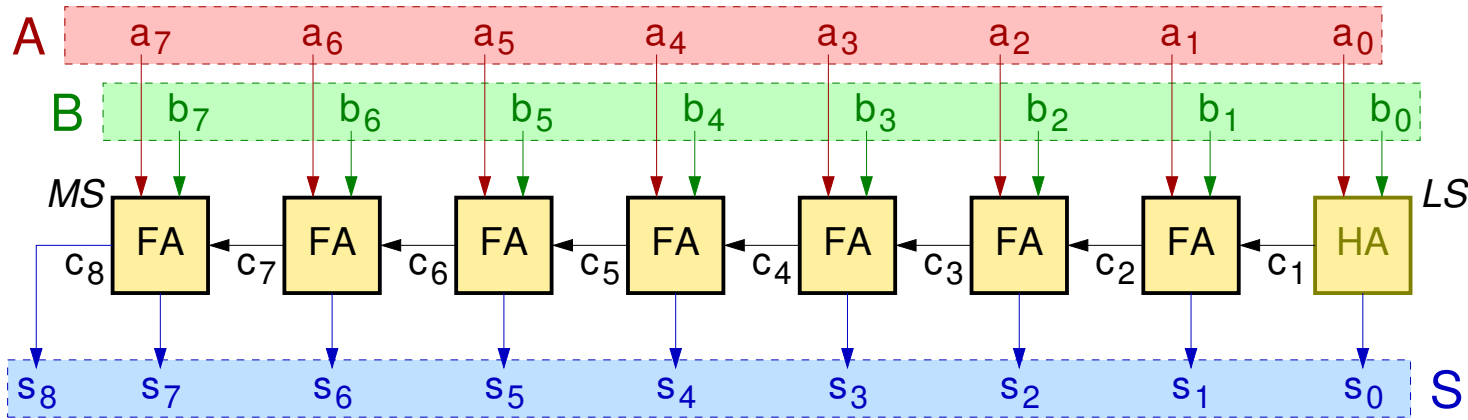


Αυξητής (Incrementor) (+1) μέσω Ημιαθροιστών μόνο

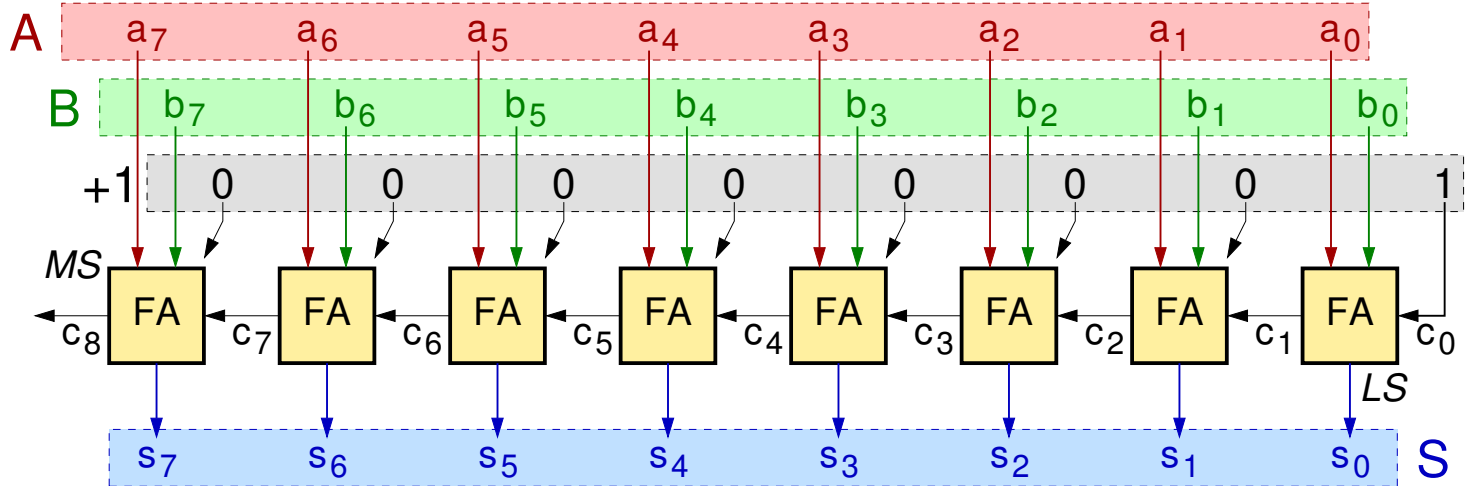


- Τα μηδενικά περιττό να προστεθούν
- Μόνον το LS bit έχει δεύτερο προσθετέο $\neq 0$
 - εκείνο ακριβώς το bit που δεν έχει κρατούμενο εισόδου
- Σε όλα τα bits αρκεί Ημιαθροιστής (Half Adder – HA)

A+B+1: αρκεί ένας μόνον Αθροιστής (με FA's παντού)

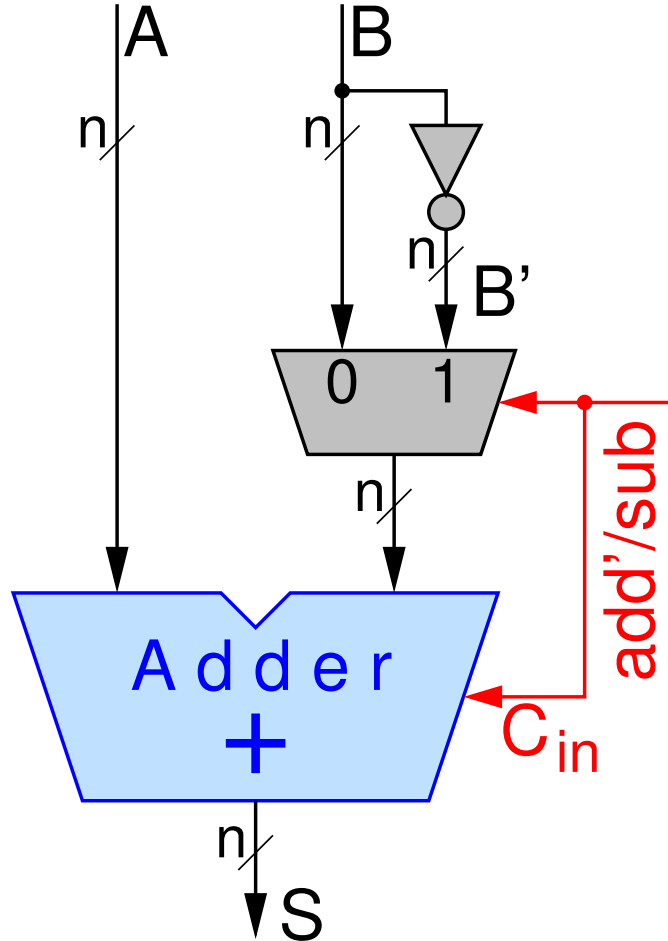


Κλασικός
Αθροιστής
δύο
αριθμών,
 $A+B$



$A+B+1$:
αρκεί
απλώς ο
δεξιός HA
να γίνει FA

Κύκλωμα Προσθαιρέτη



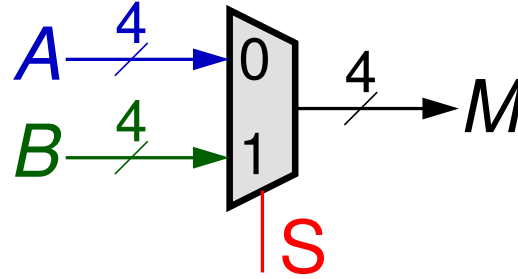
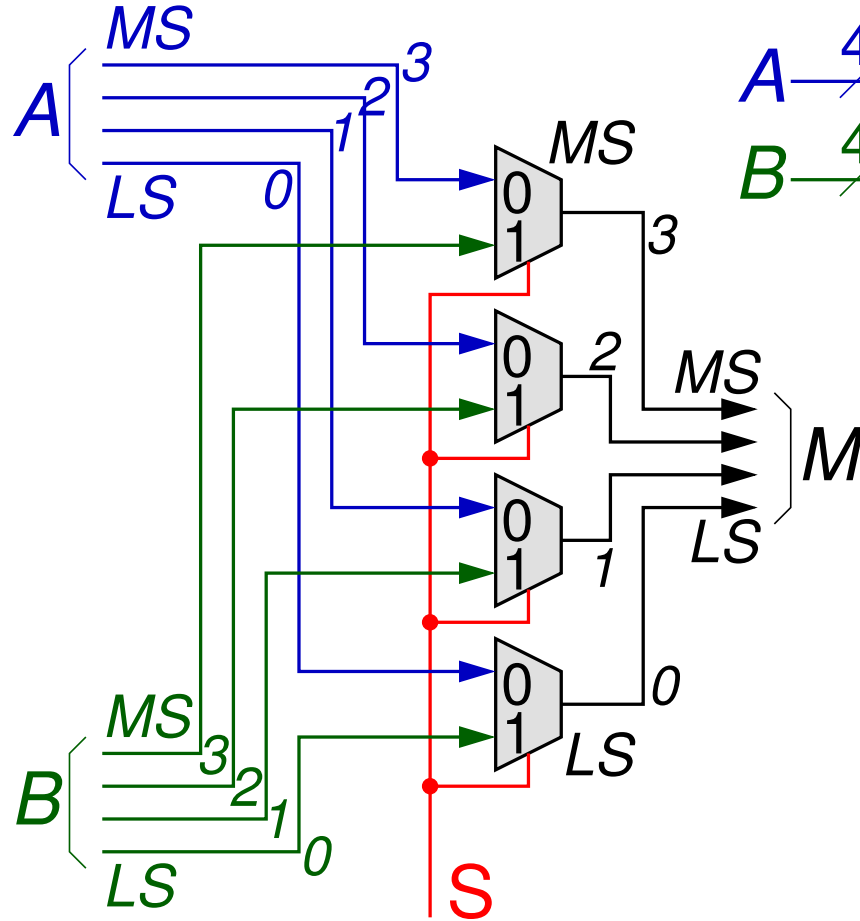
Όταν $add'/sub = 0$, τότε:

- Δεύτερη είσοδος αθροιστή = B
 - $C_{in} = 0$
- $$\Rightarrow S = A + B$$

Όταν $add'/sub = 1$, τότε:

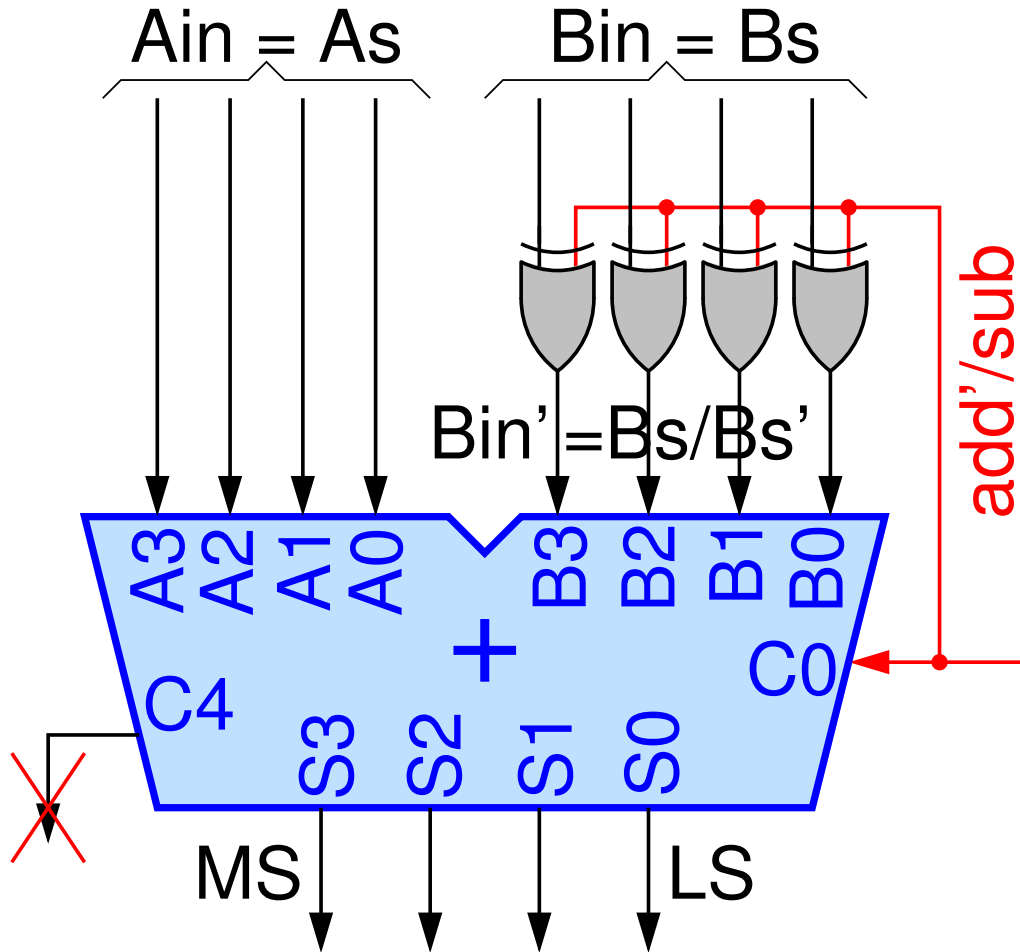
- Δεύτερη είσοδος αθροιστή = B'
 - $C_{in} = 1$
- $$\Rightarrow S = A + B' + 1 = A + (-B) = A - B$$

(Παρένθεση – από §8.1: Πολύμπιτοι Πολυπλέκτες)



- n -μπιτος πολύπλέκτης από n το πλήθος μονόμπιτους
- Επιλογή όλων των bits της μίας ή της άλλης εισόδου
- Τα αντίστοιχα bits των εισόδων, A_i και B_i – πολύπλέκονται & δίνουν το M_i
- Κοινό σήμα Επιλογής

Παρατήρηση: επιλεκτική αντιστροφή με XOR



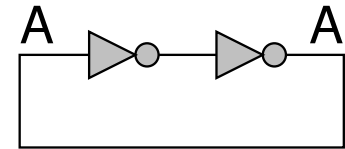
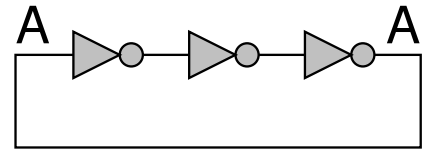
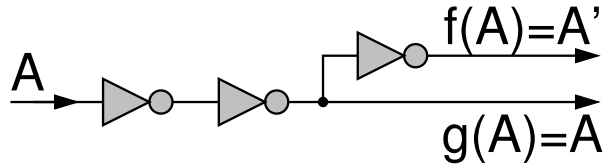
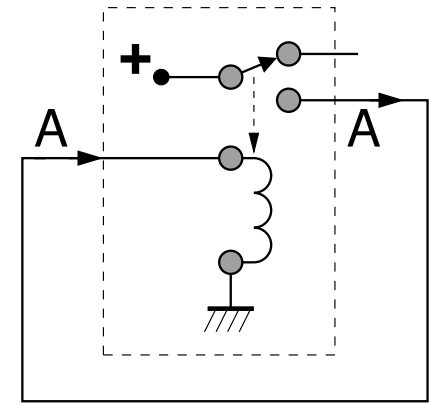
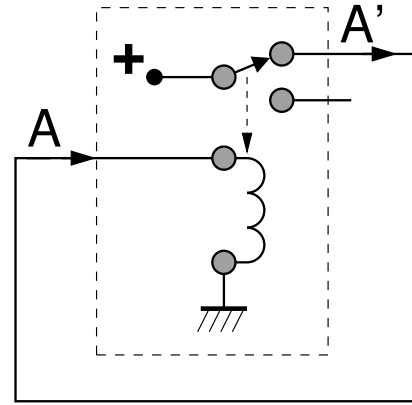
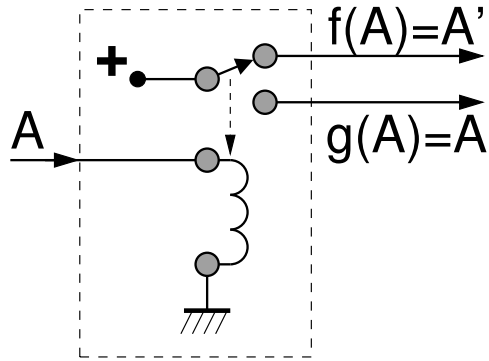
• Αντί πολυπλέκτη, γίνεται και με:

• $B \underline{XOR} 0 = B$

• $B \underline{XOR} 1 = B'$

XOR		B	
		0	1
A	0	0	1
	1	1	0

Πείραμα 6.10: Η στοιχειώδης Ιδέα του Flip-Flop



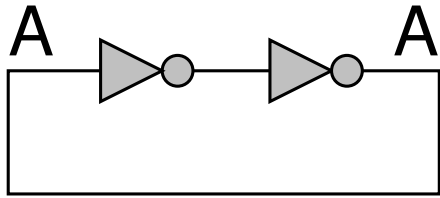
Αρνητική Ανάδραση
 \Rightarrow Ασταθές,
 Ταλάντωση
 $A=A'$: καμία λύση

Θετική Ανάδραση
 \Rightarrow Δισταθές
 $A=A$: δύο λύσεις
 ($A=0$ ή $A=1$)

- Επανάληψη από Εργαστήριο 3

(Σημείωση: με έναν αντιστροφέα (CMOS) είναι ευσταθές (μονοσταθές), στην ενδιάμεση τάση...)

Πείραμα 6.10: Η στοιχειώδης Ιδέα του Flip-Flop



- Το βασικό στοιχείο μνήμης (μανταλωτής, latch / flip-flop) αποτελείται από δύο αντιστροφείς (πύλες NOT)
- Μόνο που αυτό δεν έχει είσοδο: δεν μπορούμε να γράψουμε σε αυτό!
- Η κανονική λύση: στο Εργαστήριο 7
- Προκαταρκτικά, Πείρ. 6.10: αυτό που «απαγορεύεται δια ροπάλου»
 - ακουμπάμε ένα κόμβο με τάση τροφοδοσίας: πολύ ισχυρή, νικάει την πύλη NOT
 - το «βραχυκύκλωμα» διαρκεί μόλις λίγα ns, όσο η καθυστέρηση 1 φορά γύρω από το βρόχο: η ισχυρή τάση, που υπερνικά (σβήνει) την παλαιά αποθηκευμένη τιμή, γυρίζει πίσω, αυτοσυντηρούμενη πλέον \Rightarrow δεν προλαβαίνει να ζεσταθεί/καεί

