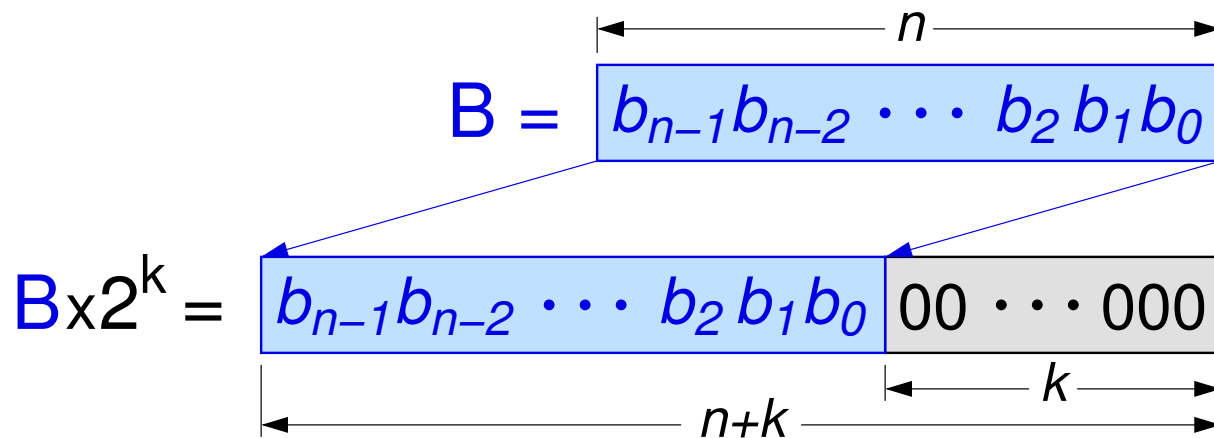


Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση, Υπόλοιπο επί/διά δύναμη του 2, Συστροφή

06α (§ 6.1 - 6.2) – 4 Νοε. 2020 – Μανόλης Κατεβαίνης

Πολλαπλασιασμός x δύναμη του 2: Αριστερή Ολίσθηση

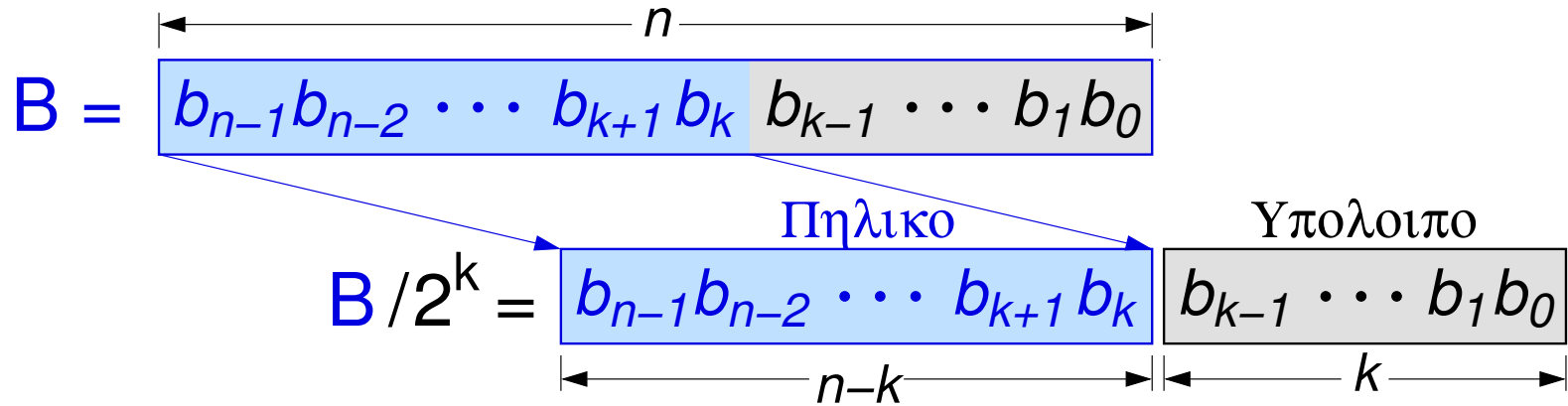


- $B = b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$

$$\Rightarrow B \times 2^k = b_{n-1} \times 2^{n+k-1} + b_{n-2} \times 2^{n+k-2} + \dots + b_2 \times 2^{k+2} + b_1 \times 2^{k+1} + b_0 \times 2^k + 0 \times 2^{k-1} + 0 \times 2^{k-2} + \dots + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

- «Αριστερή Ολίσθηση» (“Left Shift”) κατά k bits

Διαίρεση διά δύναμη του 2: Δεξιά Ολίσθηση



- $B = b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots + b_{k+1} \times 2^{k+1} + b_k \times 2^k + b_{k-1} \times 2^{k-1} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- $\Rightarrow B/2^k = b_{n-1} \times 2^{n-k-1} + b_{n-2} \times 2^{n-k-2} + \dots + b_{k+1} \times 2^1 + b_k \times 2^0 + (b_{k-1} \times 2^{k-1} + \dots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) / 2^k$
- «Δεξιά Ολίσθηση» (“Right Shift”) κατά k bits

Εφαρμογή Πηλίκου-Υπολ: Μεγάλη Μνήμη από μικρές



- Διαμοιρασμός στοιχείων σε Ομάδες των Δ (διαίρετης – εδώ $\Delta=5$)
- Το στοιχείο N σε ποιάν Ομάδα και σε ποιά Θέση βρίσκεται;
- Ομάδα = Πηλίκο (N/Δ)
- Θέση εντός ομάδας = Υπόλοιπο (N/Δ)

Εφαρμογή:
Μεγάλη Μνήμη
κατασκευασμένη από
πολλές μικρότερες

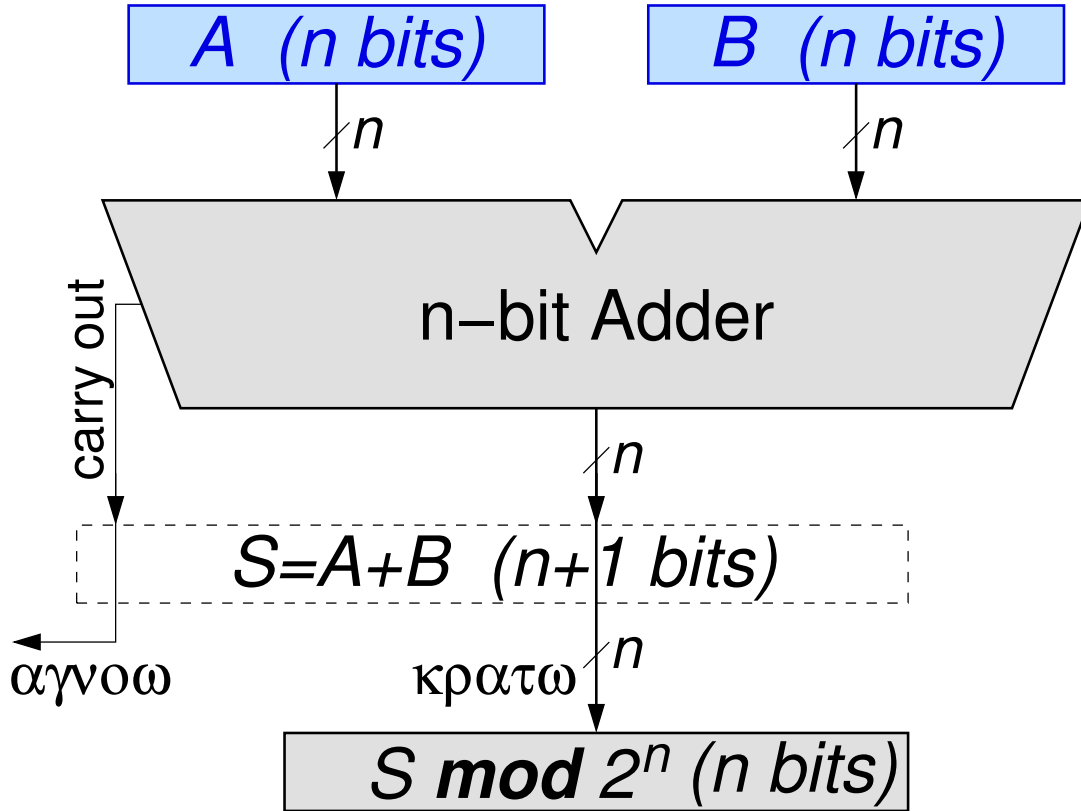
Γιατί μετράμε τα N στοιχεία από το 0 έως το $N-1$

- Για να ισχύει η προηγούμενη ιδιότητα πηλίκου-υπολοίπου πρέπει τα N στοιχεία να τα μετράμε από το 0 έως το $N-1$
- Παράδειγμα «σωστής» μέτρησης:
 - Ξενοδοχείο με 500 δωμάτια σε 5 επίπεδα:
 - Όροφος 0 : Δωμάτια 000 έως 099 (Ισόγειο)
 - Όροφος 1 : Δωμάτια 100 έως 199
 - Όροφος 2 : Δωμάτια 200 έως 299
 - Όροφος 3 : Δωμάτια 300 έως 399
 - Όροφος 4 : Δωμάτια 400 έως 499

Παράδειγμα «λάθος» μέτρησης, από το 1 έως το N

- 2100 χρόνια σε 21 αιώνες από 100 χρόνια ανά αιώνα:
 - 1^{ος} αιώνας: έτη 1 έως και 100
 - ...
 - 19^{ος} αιώνας: έτη 1801 έως και 1900
 - 20^{ος} αιώνας: έτη 1901 έως και 2000
 - 21^{ος} αιώνας: έτη 2001 έως και 2100
- Ο αιώνας “A” περιέχει 99 χρόνια που η αρίθμησή τους ξεκινά με “A-1”, και ένα έτος με αριθμό “A00” (!)

Πρόσθεση κρατώντας μόνον n bits: Συστροφή



- Δύο αιτίες:
- Δεν χωρά το πρόσθετο bit σε μνήμη / καταχωρητές
- Για «πολύ μεγάλα» αποτελέσματα, η αγνόηση του carry-out ισοδυναμεί με «μείον 2^n »

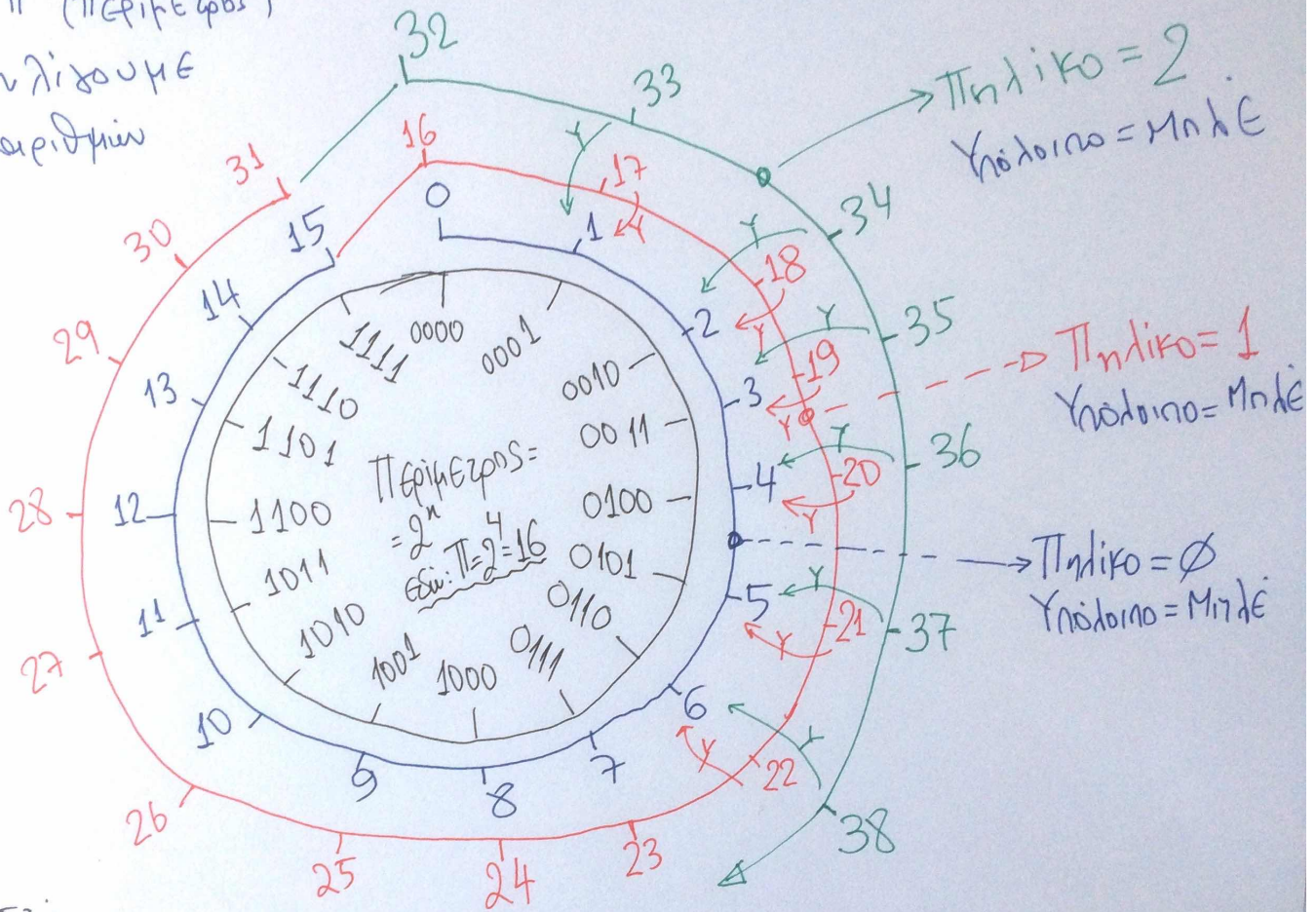
⇒ δυνατότητα αναπαράστασης & πράξεων με αρνητικούς

Η Διαίρεση δια π (Περίμετρος)
 είναι σαν να τυλίγουμε
 τον άξονα των αριθμών
 γύρω από ένα
 καρτέλι
 περιμέτρου π :

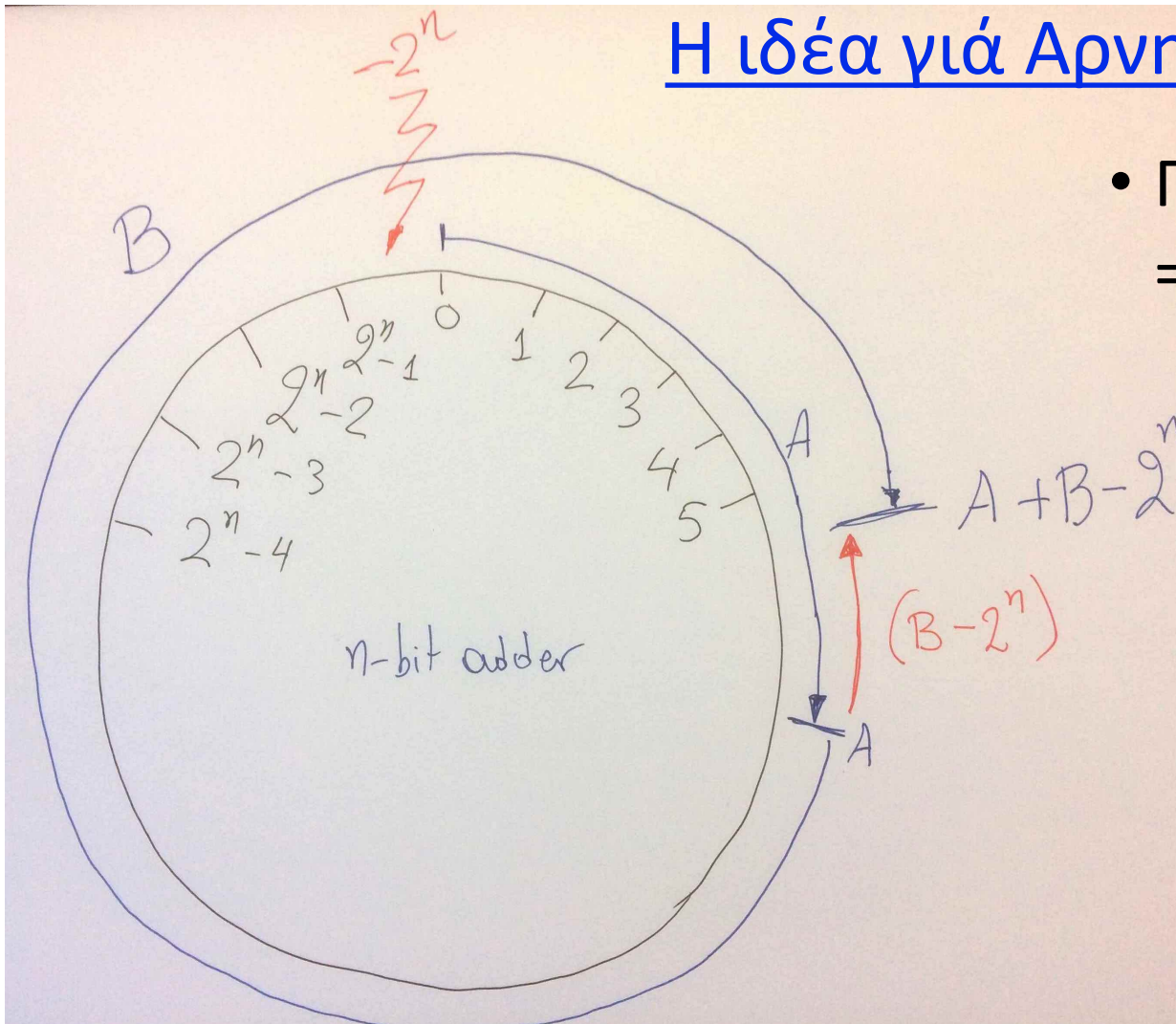
$\pi_{\text{ηλίκο}} = \text{ποια}$
 σάρωση

$\gamma_{\text{νόστινο}} =$
 ποια
 γωνία
 πέρα
 στο
 καρτέλι

Όταν κόβουμε
 το carry-out
 από τον αθροιστή
 είναι σαν να κρατάμε
 μόνο το $\gamma_{\text{νόστινο}}$ (μνή) από το αθροιστή.

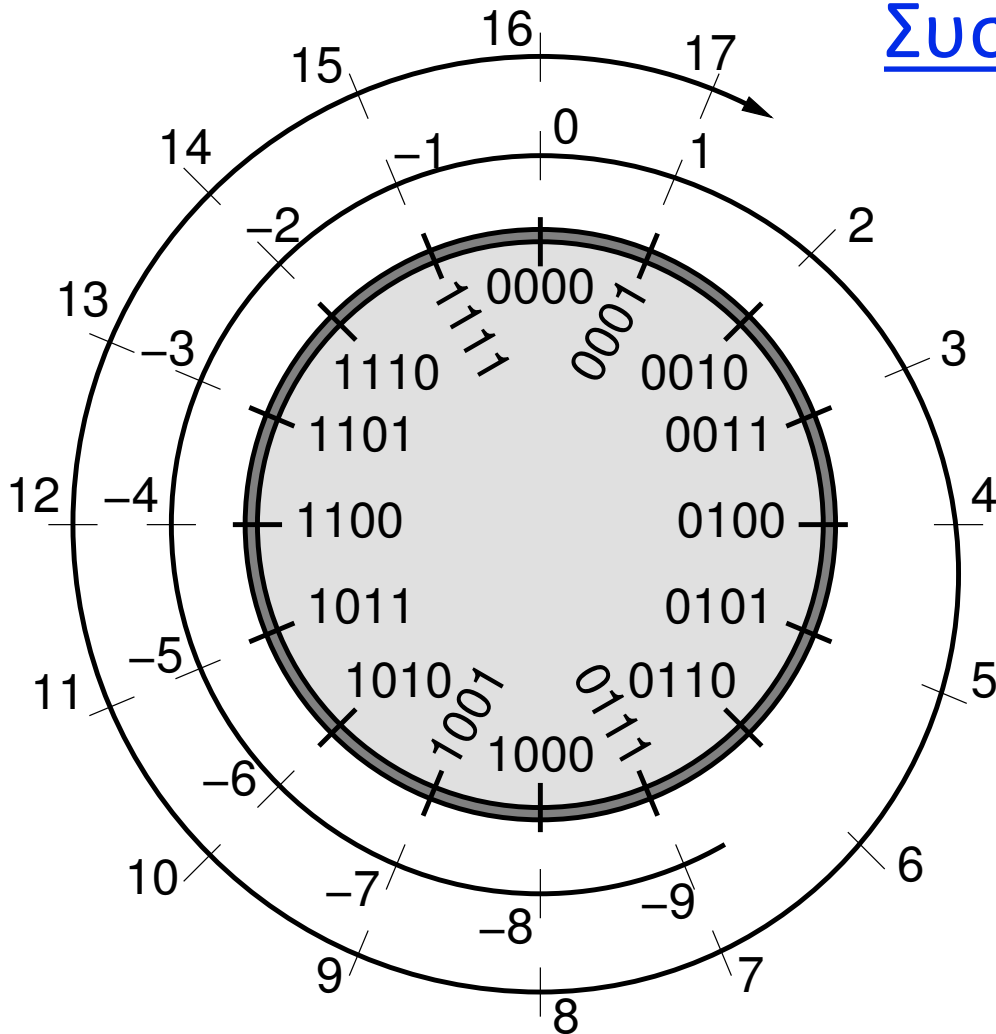


Η ιδέα για Αρνητικούς Αριθμούς



- Πρόσθεση mod 2^n
= συστροφή
- Πρόσθεση δεξιόστροφα (θετικά) ενός αριθμού = πρόσθεση αριστερόστροφα (αρνητικά) ενός άλλου αριθμού

Συστροφή και Αρνητικοί Αρ.



- Πρόσθεση mod $2^n =$ συστροφή
- Όπως επεκτείνουμε προς τα δεξιά τον άξονα των αριθμών, μπορούμε να τον επεκτείνουμε και αριστερά, προς τους αρνητικούς αριθμούς