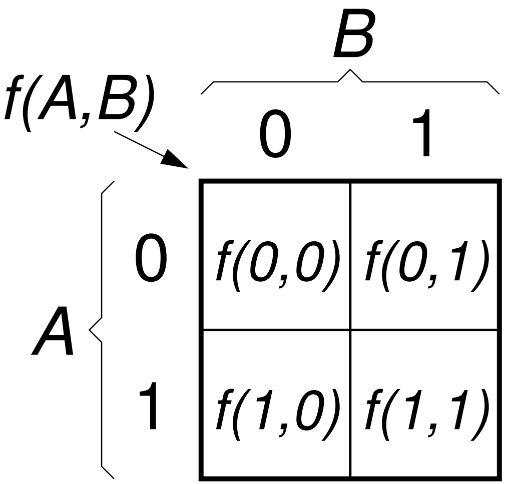
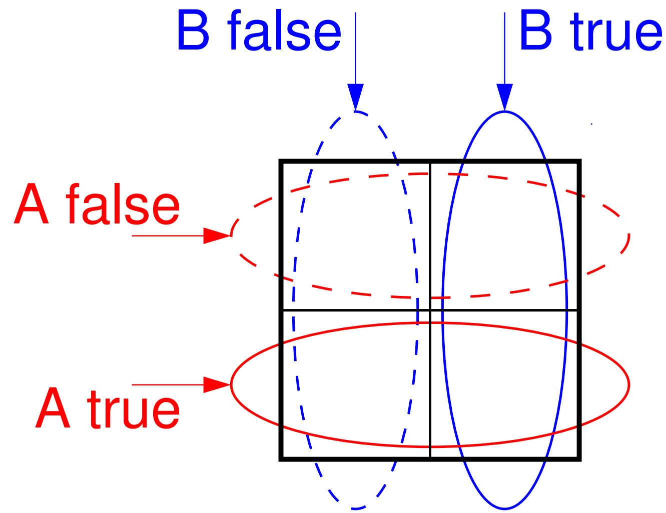
Διαγράμματα Venn – Χάρτες Karnaugh, Άλγεβρα Boole

04α (§ 4.1 - 4.8) – 21-26 Οκτ. 2020 – Μανόλης Κατεβαίνης

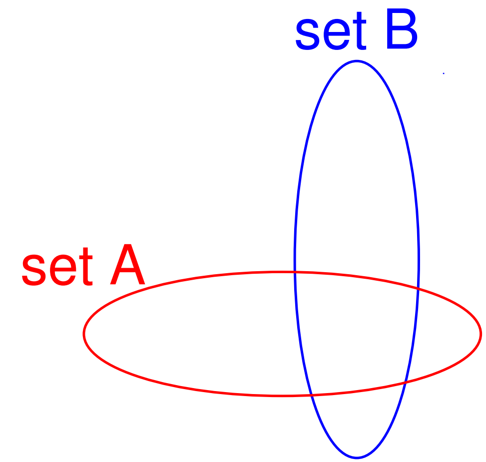
Χάρτης Karnaugh / Διάγραμμα Venn 2 Μεταβλητών



Πίνακας Αληθείας σε μορφή Χάρτη Karnaugh



Οι «Περιοχές» της κάθε Μεταβλητής



Διάγραμμα συνόλων τύπου Venn

- Μεταβλητές σε ορθογώνιους άξονες – Διδιάστατο διάγραμμα

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών με έναν Άσο στον Π.Α.

f(A,B)		*B'* 0	*B* 1
A'	0	0	0
A	1	0	1

g(A,B)		*B'* 0	*B* 1
A'	0	0	1
A	1	0	0

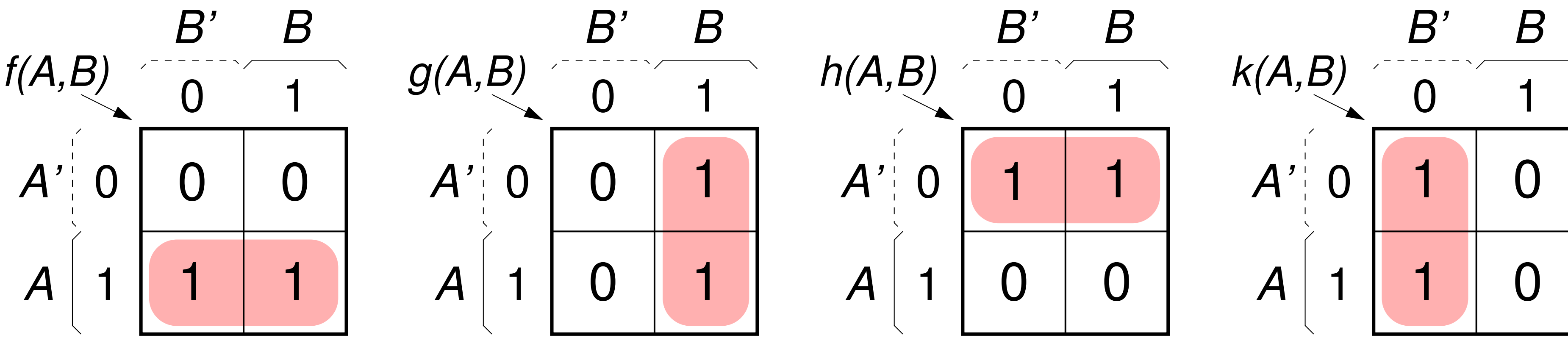
h(A,B)		*B'* 0	*B* 1
A'	0	0	0
A	1	1	0

k(A,B)		*B'* 0	*B* 1
A'	0	1	0
A	1	0	0

$f(A,B) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ $g(A,B) = \mathrm{A}'\cdot\mathrm{B}$ $h(A,B) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}'$ $k(A,B) = \mathrm{A}'\cdot\mathrm{B}'$

- Το **KAI** ανάβει σε μία και μόνο μία περίπτωση
- Η τομή δύο συνόλων στο διάγραμμα Venn
- Οι 4 έξοδοι του αποκωδικοποιητή

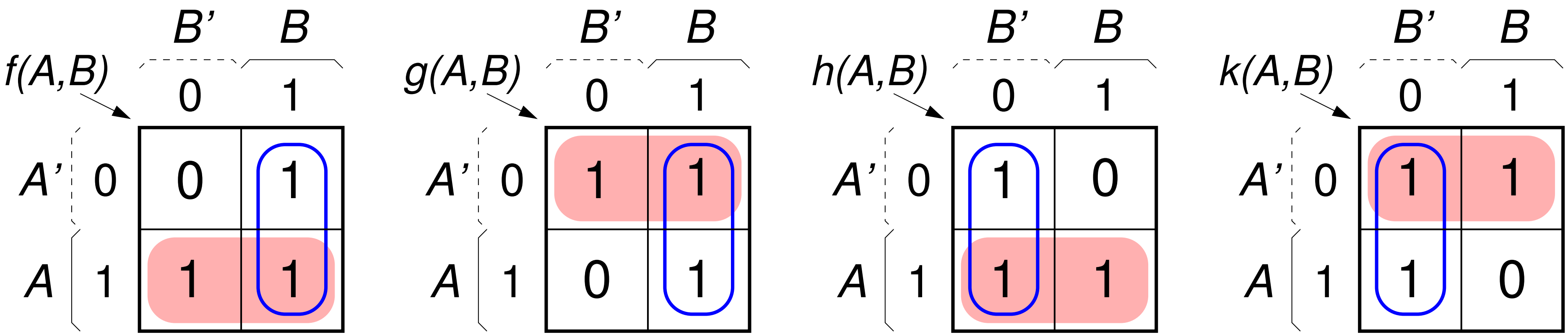
Δύο άσοι σε ***γειτονικά*** τετρ.: ανεξαρτ. από μία μτβλ.



$f(A,B) = \mathrm{A}$ $\qquad g(A,B) = \mathrm{B}$ $\qquad h(A,B) = \mathrm{A}'$ $\qquad k(A,B) = \mathrm{B}'$

- Γειτονικά τετράγωνα = μία μτβλ. αλλάζει, οι άλλες ίδιες
- Συνάρτηση ίδια σε 2 γειτονικά τετράγωνα ⇒ ανεξάρτητη από τη μεταβλητή εισόδου που αλλάζει μεταξύ τους

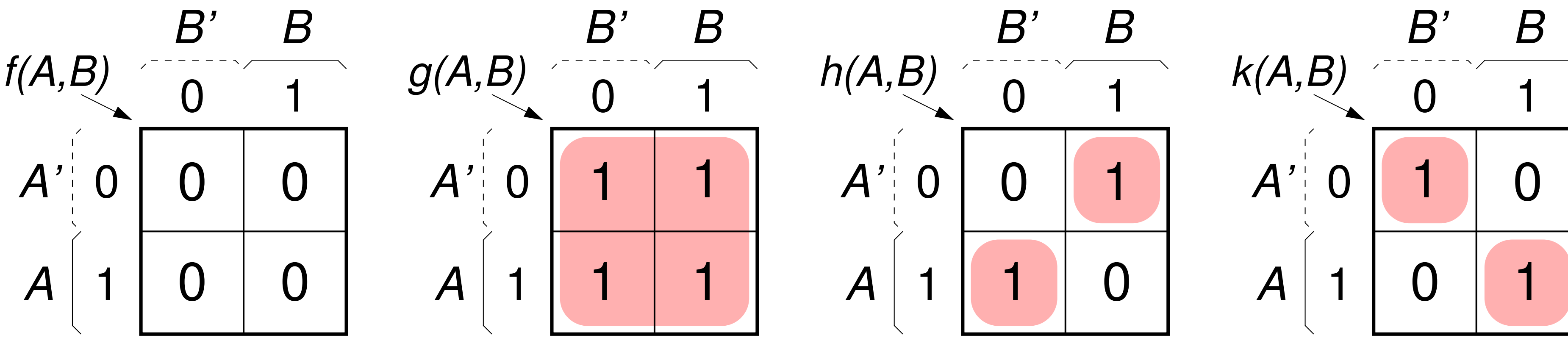
Η συνάρτηση OR: Ένωση συνόλων



f(A,B) = A+B   *g(A,B)* = A’+B   *h(A,B)* = A+B’   *k()* = A’+B’

- Καλύπτουμε όλους τους άσους με *ορθογώνιες* περιοχές, όσο πιό μεγάλες γίνεται (μέγεθος $\Rightarrow$ ανεξαρτησία)
- Η συνάρτηση είναι το **<u>OR</u>** (ένωση) όλων των επιμέρους

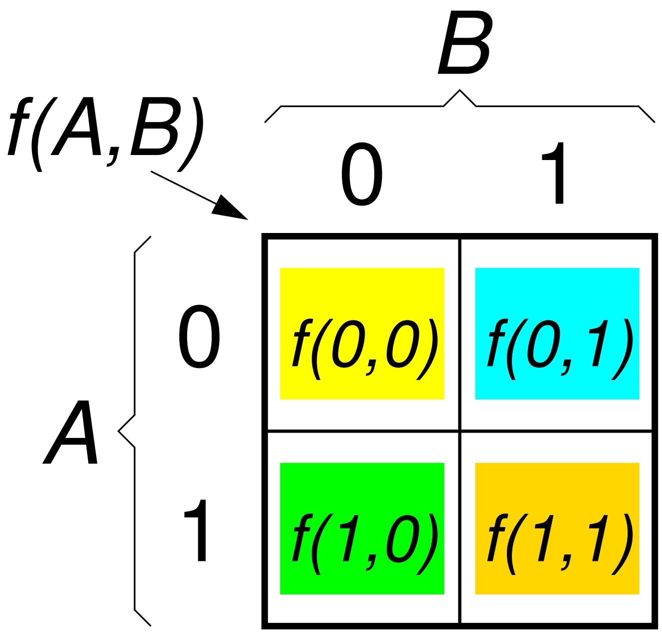
Οι υπόλοιπες 4 συναρτήσεις 2 μεταβλητών…



$f(A,B) = 0$ $g(A,B) = 1$ A·B’ + A’·B A’·B’ + A·B

- Ίδια τιμή σε 4 γειτονικά τετρ. ⇒ ανεξαρτησία από 2 μτβλ.
- Οι XOR και XNOR δεν αδιαφορούν γιά καμία είσοδο (ιδιό-τητα ανίχνευσης σφαλμάτων) ⇒ καμία απλοποίηση όρων

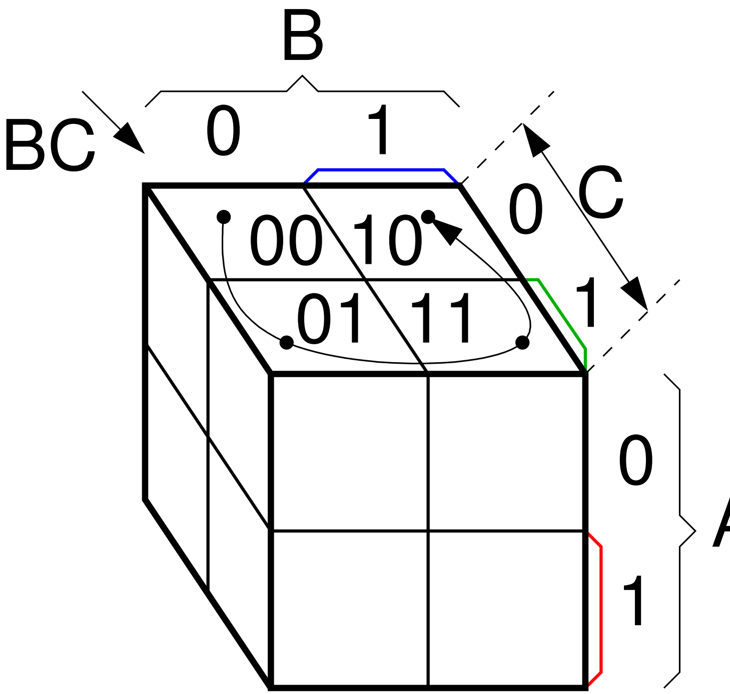
Γιατί υπάρχουν 16 (=2^4) συναρτήσεις 2 μεταβλητών;



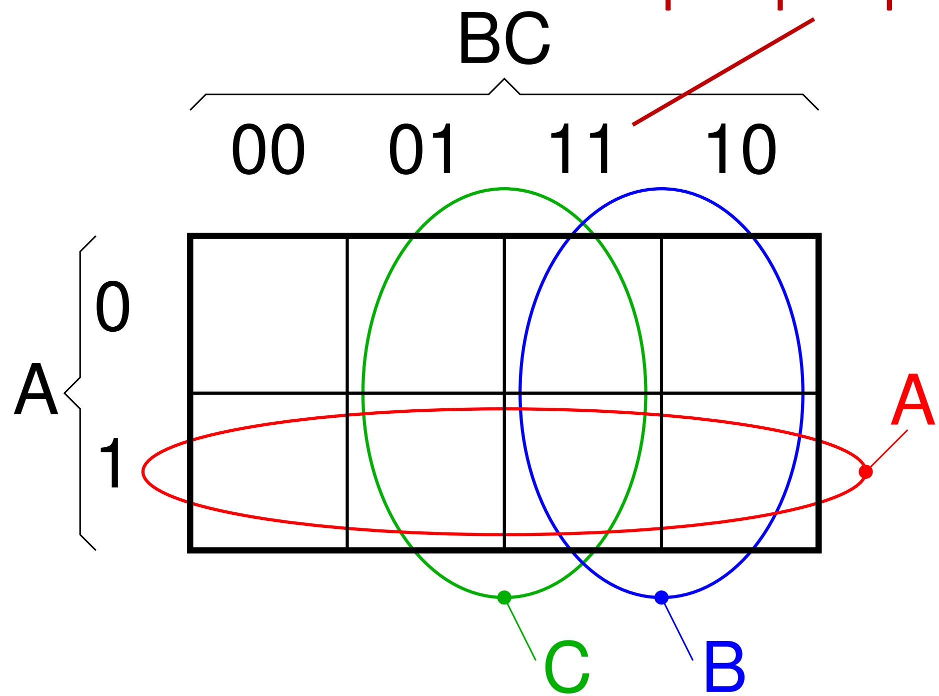
- Ψηφιακή δυαδική συνάρτηση δύο ψηφιακών δυαδικών μτβλ.
- Πλήρως καθορισμένη από τον πίνακα αληθείας της
- Ο πιν. αλ. της έχει 4 θέσεις
- Σε κάθε θέση, 2 επιτρεπτές τιμές

- Τα 4 bits στα 4 χρωματιστά τετρ. καθορίζουν πλήρως την *f()*
- Υπάρχουν ακριβώς και μόνον 2^4=16 συνδυασμοί των 4 bits, άρα υπάρχουν ακριβώς 2^4=16 συναρτήσεις Boole 2 μεταβλ.

Χάρτης Karnaugh / Διάγραμμα Venn 3 Μεταβλητών



όχι η συνηθι-
σμένη σειρά!



- Τρείς Μεταβλητές
- Τριδιάστατο Διάγραμμα
- Κόβουμε και ξετυλίγουμε

Συναρτήσεις 3 μεταβλητών με έναν Άσο στον Π.Α.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0

$A \cdot B \cdot C$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1

$A \cdot B \cdot C'$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0

$A \cdot B' \cdot C$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0

$A \cdot B' \cdot C'$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	0	0

$A' \cdot B \cdot C$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0

$A' \cdot B \cdot C'$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	0	0	0

$A' \cdot B' \cdot C$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0

$A' \cdot B' \cdot C'$

Συναρτ. 3 μτβλ. με δύο ***γειτονικούς*** Άσους στον Π.Α.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1

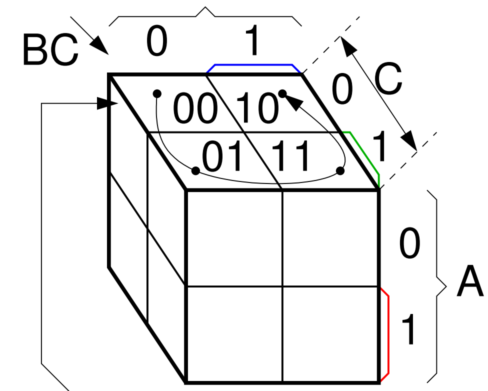
A·B

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0

A·C

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0

A’·B’



γειτονικα!

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

B·C

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0

B’·C

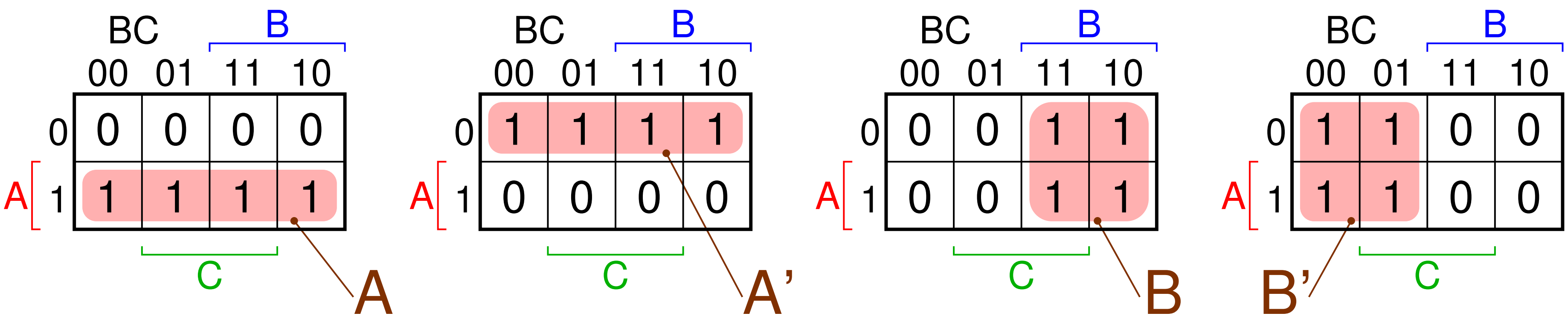
A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1

A·C’

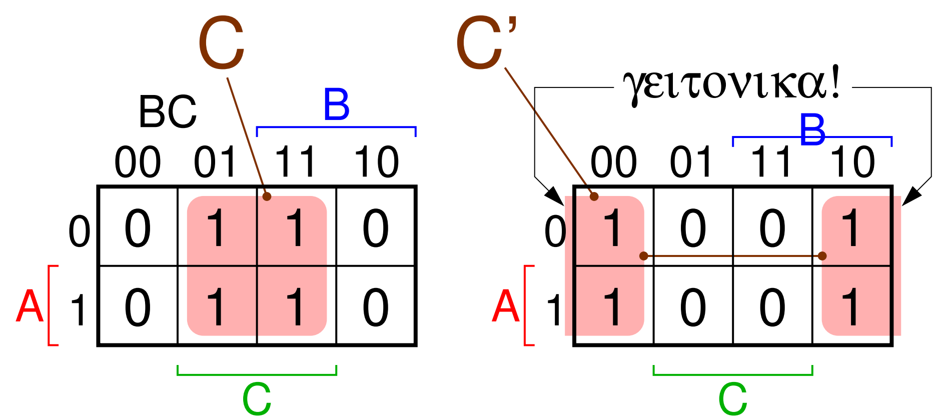
A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0

A’·C’

4 ***γειτονικοί*** άσοι: ανεξαρτησία από 2 μεταβλητές

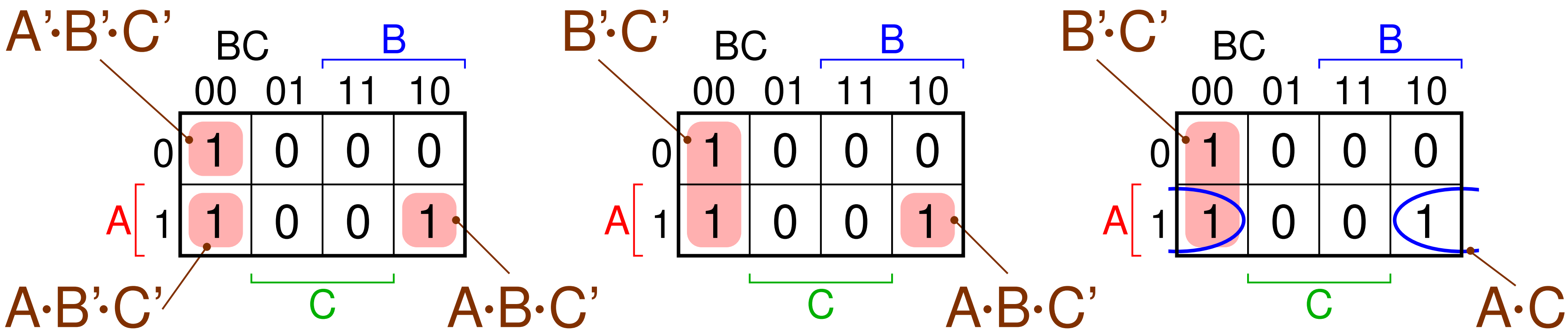


- Γειτονιές *ορθογωνίου* σχήματος πάντα
- Κάθε διπλασιασμός μεγέθους γειτονιάς αντιστοιχεί σε ανεξαρτησία από μία επιπλέον μεταβλητή εισόδου



- 4 άσοι ⇒ ανεξαρτησία από 2 μτβλ.

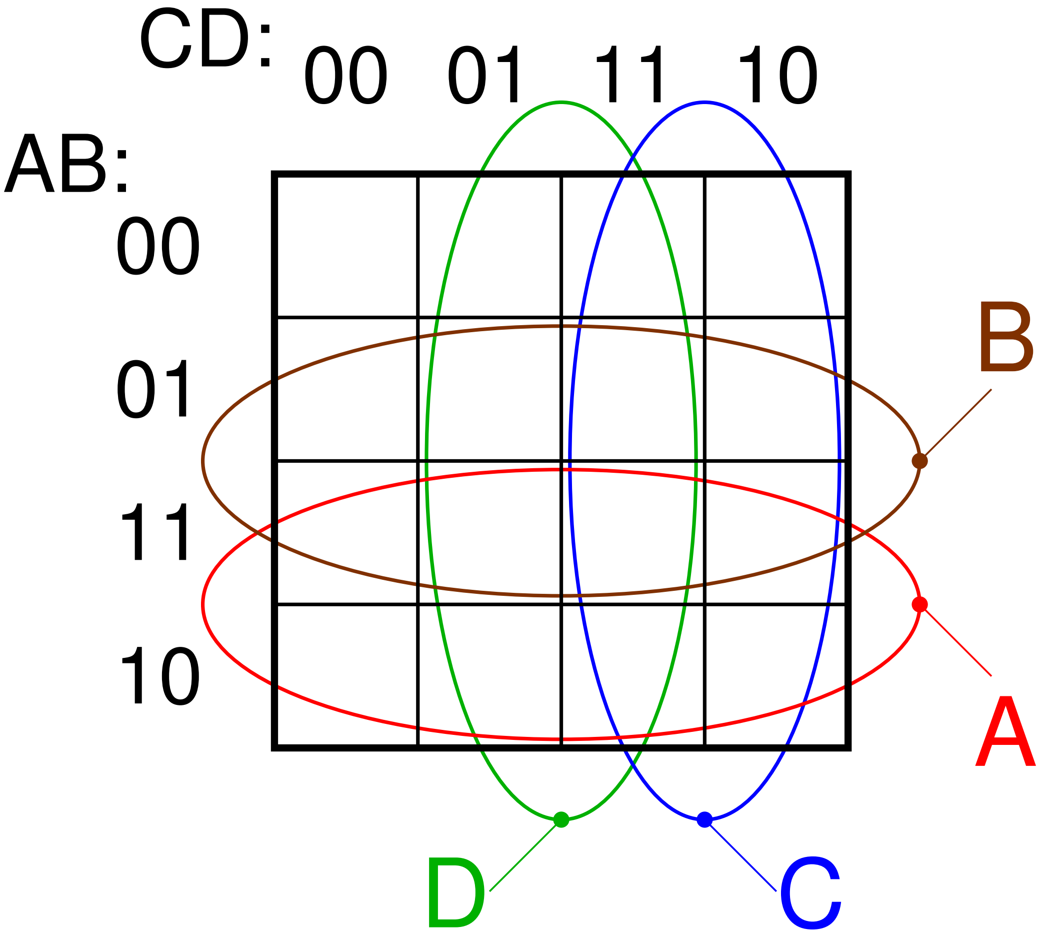
Ένωση Γειτονιών (OR): συμφέρει να είναι Μεγάλες



A'·B'·C'+A·B'·C'+A·B·C'   B'·C' + A·B·C'   B'·C' + A·C'

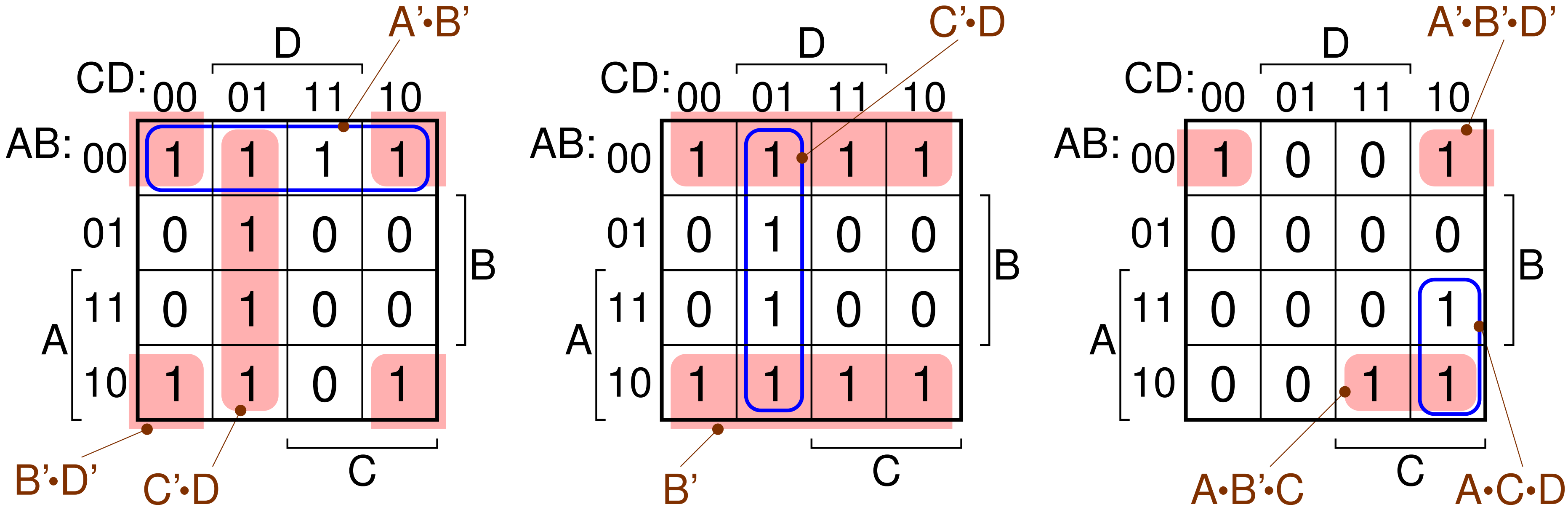
- Ολική Συνάρτηση = **OR** (όροι **AND** ορθογώνιων γειτονιών)
- Όσο μεγαλύτερη γειτονιά, τόσο μικρότερος όρος **AND**
- Συμφέρει «φούσκωμα» γειτονιών, *και με αλληλοκάλυψη*
- Η ROM της §2.5 υλοποιεί την αριστερή (χειρότερη) λύση

Χάρτης Karnaugh 4 Μεταβλητών



- Σαν από ξετύλιγμα και οριζόντια και κατακόρυφα
- Αριστερή στήλη γειτονική με δεξιά
- Επάνω γραμμή γειτονική με κάτω

Παραδείγματα Συναρτήσεων 4 Μεταβλητών



$B'{\cdot}D' + C'{\cdot}D + A'{\cdot}B'$ $\quad$ $B' + C'{\cdot}D$ $\quad$ $A{\cdot}B'{\cdot}C + A{\cdot}C{\cdot}D' + A'{\cdot}B'{\cdot}D'$

Μέγεθος «Γειτονιάς» (πλήθος κουτακίων)	1	2	4	8	16
Όρος **KAI** ανεξάρτητος από πόσες μεταβλητές	0	1	2	3	4
Όρος **KAI** περιέχει πόσες μεταβλητές εισόδου	4	3	2	1	0

Τι κάνουμε γιά Συναρτήσεις ≥5 μεταβλητών;

- Χάρτης Karnaugh πέντε μεταβλητών θα ήταν σαν *δύο* χάρτες 4 μεταβλητών ο ένας πάνω από τον άλλον, κλπ.
- Δεν είναι πρακτικό/χρήσιμο γιά τους ανθρώπους
- Σημερινή τεχνολογία έχει προχωρήσει πολύ
  - Κανείς πιά δεν βελτιστοποιεί «συνδυαστική λογική» με το χέρι
  - Πολύ εξελιγμένοι αλγόριθμοι και προγράμματα αυτοματοποιημένης βελτιστοποίησης
- ***EDA*** *(Electronic Design Automation) Tools*
- ***CAD*** *(Computer Aided Design)*

Το σύμβολο “x” (don’t care) στην πλευρά Εισόδων Π.Α.

- Σύντμηση πολλαπλών πανομοιότυπων γραμμών
  - ανεξαρτησία εξόδων από (αδιαφορία γιά) κάποια μτβλ. εισόδου
  - «ό,τι και να’ναι αυτή η μεταβλητή, εσύ κάνεις το ίδιο»

Χορτο-φάγος;	Χοιρινό τρώτε;	Πιάτο:
1	x	Σαλάτα
0	0	κοτόπουλο
0	1	πριζόλα

Write	DataIn	Μνήμη=
0	x	ό,τι πριν
1	0	0
1	1	1

A	B	A·B
0	x	0
1	0	0
1	1	1

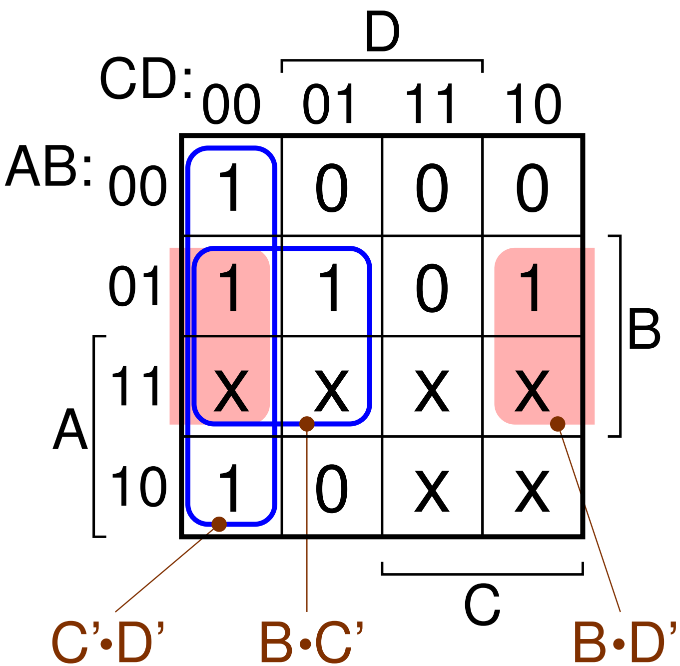
Χορτοφ.;	Χοιρινό;	Πιάτο:
1	0	Σαλάτα
1	1	Σαλάτα
0	0	κοτόπουλο
0	1	πριζόλα

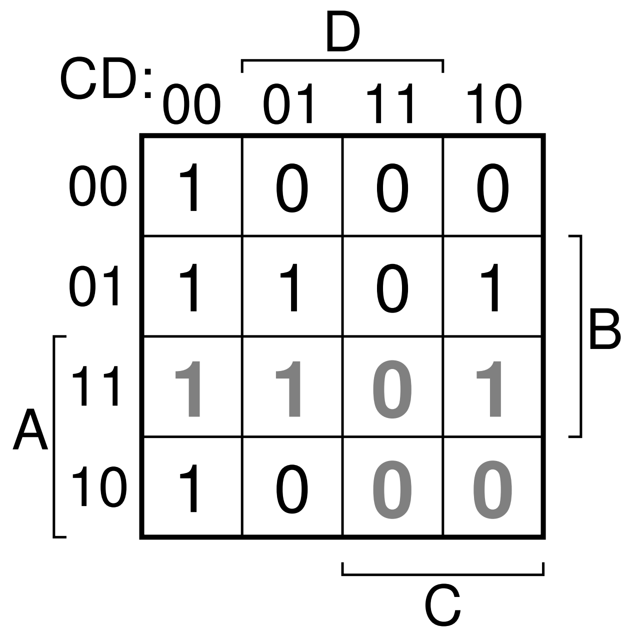
Write	DataIn	Μνήμη=
0	0	ό,τι πριν
0	1	ό,τι πριν
1	0	0
1	1	1

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Το σύμβολο "x" (don't care) στην πλευρά Εξόδων Π.Α.

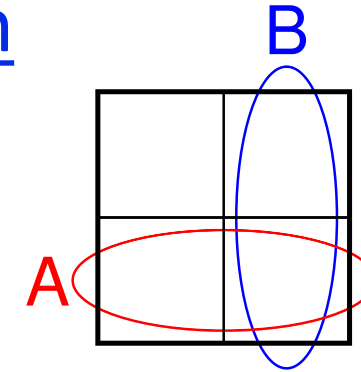
- Προδιαγραφές: «Δεν με νοιάζει – κάνε ό,τι συμφέρει»
  - Τελικά, η έξοδος, ή 0 θα είναι ή 1 θα είναι σε αυτή τη θέση του πίνακα αληθείας – απλά εμείς δεχόμαστε οιοδήποτε εκ των δύο





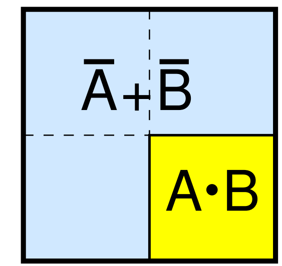
Ο πελάτης ζήτησε το αριστερό. Ο σχεδιαστής επέλεξε το δεξί. Τα γκρίζα τα επιλέγει ο σχεδιαστής, όπως τον συμφέρει.

Άλγεβρα Boole 1: Θεώρημα De Morgan



- Δύο αρνήσεις = μία κατάφαση:

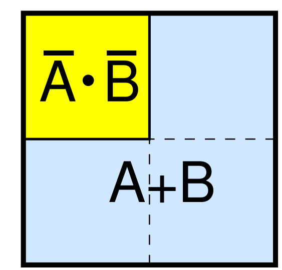
$$(A')' = A$$



- De Morgan / Δυϊσμός ΚΑΙ - Ή:

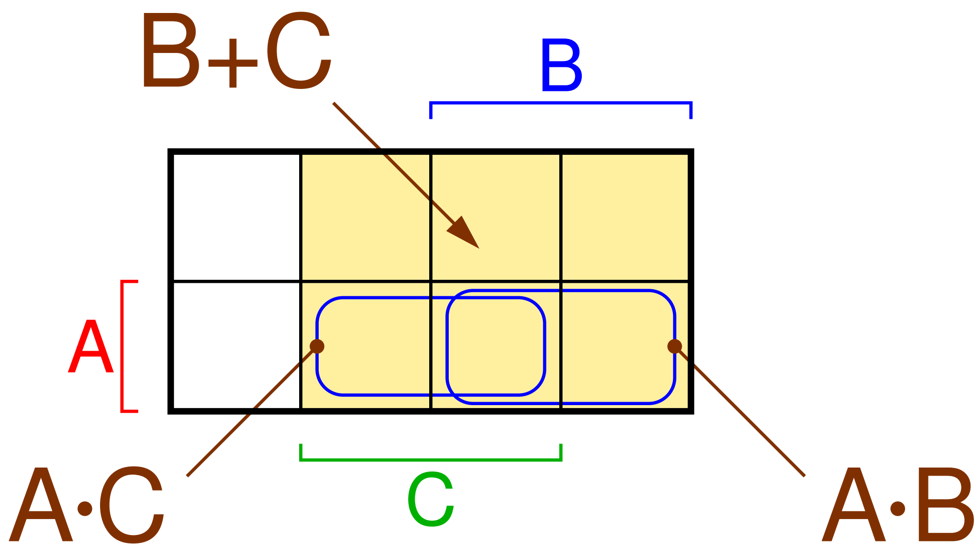
$$(A \cdot B)' = A' + B'$$

$$(A+B)' = A' \cdot B'$$



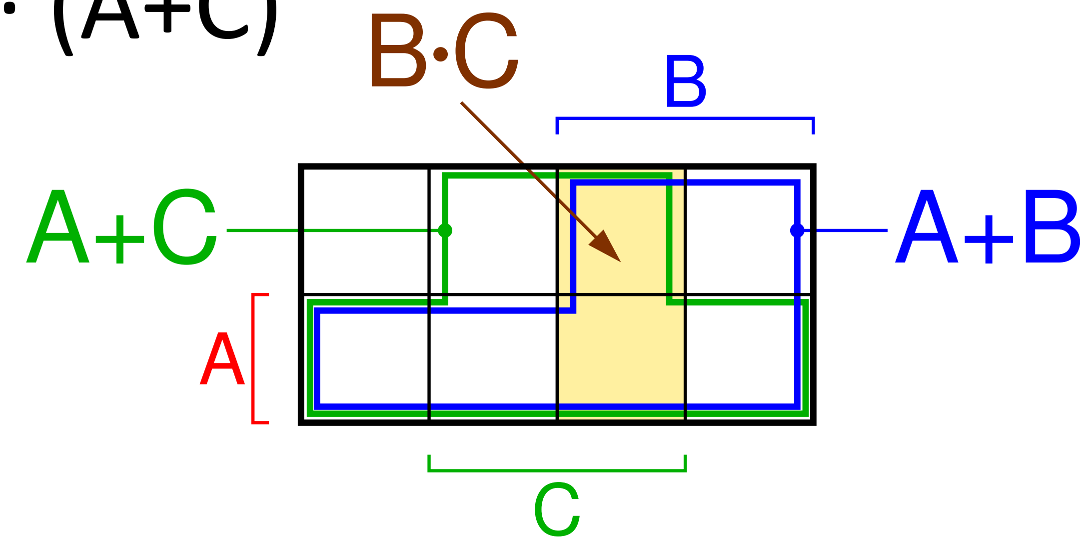
Επιμεριστική ιδιότητα του ***ΚΑΙ*** ως προς το ***Ή***

$$A \cdot (B+C) = A{\cdot}B + A{\cdot}C$$



Και το Δυϊκό: Επιμεριστική ιδ. του ***Ή*** ως προς το ***ΚΑΙ***

$$A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$$



Δυϊσμός: Σε κάθε ταυτότητα της άλγεβρας Boole, εάν αλλά-ξουμε τα **ΚΑΙ** σε **Ή**, τα **Ή** σε **ΚΑΙ**, τις σταθερές **0** σε **1**, και τις **1** σε **0**, προκύπτει μιά άλλη, δυϊκή της, αληθής ταυτότητα!

Απόδειξη του Δυϊκού χρησιμοποιώντας το ευθύ

$A+(B\cdot C) =$

$= [\,(A+(B\cdot C))'\,]'$ ← Δύο αρνήσεις

$= [\,A' \cdot (B\cdot C)'\,]'$ ← Εσωτ. ΟΧΙ του Ή (De Morgan)

$= [\,A' \cdot (B' + C')\,]'$ ← Εσωτ. ΟΧΙ του ΚΑΙ (De Morgan)

$= [\,(A'\cdot B') + (A'\cdot C')\,]'$ ← ***Επιμεριστική ΚΑΙ προς Ή (ευθύ)***

$= (A'\cdot B')' \cdot (A'\cdot C')'$ ← Εξωτ. ΟΧΙ του Ή (De Morgan)

$= (A''+B'') \cdot (A''+C'')$ ← Εσωτ. ΟΧΙ του ΚΑΙ (De Morgan)

$= (A + B) \cdot (A + C)$ ← Δύο αρνήσεις

Άλλες Ταυτότητες της Άλγεβρας Boole & τα Δυϊκά τους

$A \cdot B = B \cdot A$	$A+B = B+A$	(αντιμεταθετική)
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	$(A+B)+C = A+(B+C)$	(προσεταιριστική)
$A \cdot 0 = 0$	$A+1 = 1$	(annihilator element)
$A \cdot 1 = A$	$A+0 = A$	(identity element)
$A \cdot A = A$	$A+A = A$	(idempotent)
$A \cdot A' = 0$	$A+A' = 1$	(complementation)
$A \cdot (A+B) = A$	$A+A \cdot B = A$	(absorption)
$A \cdot (A'+B) = A \cdot B$	$A + A' \cdot B = A+B$	